

MATERIAL MËSIMOR

Në mbështetje të mësuesve të drejtimit mësimor

NDËRTIM

Niveli II i KSHK

NR. 11

Ky material mësimor i referohet:

➤ **Lëndës profesionale: “ Mekanikë ndërtimi” Kl. 10 (L-02-365-15)**

➤ **Temave mësimore:**

- **Kuptimet bazë të statikës**
- **Sistemet e forcave konkurente plane dhe kushtet e ekuilibrit të tyre**
- **Sistemet e forcave paralele plane**
- **Sistemi i çfarëdoshëm i forcave plane dhe kushtet e ekuilibrit të tyre**
- **Kapriatat**
- **Rezistenca e materialeve**
- **Përkulja e trarëve të drejtë**
- **Trarët e vazhduar**
- **Përkulja gjatësore**

E përgatitën:

**Ing. Silvana Pavaci
Ing. Diana Bardhi**

Tiranë, 2020

Tema mësimore nr.1: Kuptimet bazë të statikës

1.1. Kuptimi i forcës

Të gjithë trupat duke qënë nën veprimin e forcave të jashtme, ndryshojnë formën dhe përmasat e tyre. Kur ndryshimet në formën dhe përmasat e trupave janë të vogla trupi është i pashformshëm dhe pranohet si absolutisht i ngurtë.

Forcë quhet madhësia fizike e cila karakterizon veprimin e një trupi ndaj një trupi tjetër, dhe si pasojë sjell ndryshimin e gjëndjes së mëparshme të prehjes ose të lëvizjes së trupit.

➤ Forcat kanë natyrë të ndryshme fizike dhe klasifikohen:

- Forca të tërheqjes gravitacionale.
- Forca elektromagnetike.
- Forca bërthamore.
- Forcat të bashkëveprimit të dobët.

➤ Forcat janë madhësi vektoriale dhe percaktohen sin ë fig.1.1.1. nga këto elemente :

- drejtim;
- kahu;
- vlera numerike
- pikë veprimi ose zbatimi

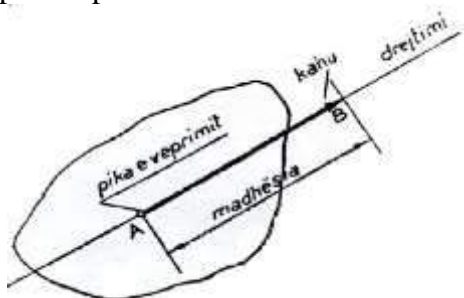


fig.1.1.1.

Një forcë, duke qënë madhësi vektoriale, mund të paraqitet në mënyrë grafike me anë të një vektori i cili shënohet me \vec{F}

Kur mbi një trup veprojnë një bashkësi forcash, këto forca *formojnë një sistem forcash* që shënohen: $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n)$

➤ Sistemet e forcave që veorojnë në trupat e ngurtë klasifikohen:

- *Sistem forcash të përputhura;*
- *Sistem forcash konkurrent;*
- *Sistem çfardoshëm forcash në plan;*
- *Sistem forcashparalele plane*

1.2. Aksiomat e statikës

Aksioma I

Një trup i ngurtë ndodhet në ekuilibër nën veprimin e dy forcave që kanë vlerë të barabartë, kanë vijë veprimi të njëjtë dhe kahe të kundërta.

Aksioma II

Mbi një trup absolutisht të ngurtë mund të vendoset ose të hiqet një sistem forcash i njëvlefshëm me zero, pa e ndryshuar gjëndjen e trupit.

Rrjedhim nga aksioma I dhe aksioma II

Efekti i një force mbi trupin e ngurtë nuk ndryshon, në qoftë se pika e zbatimit të forcës zhvendoset gjatë drejtimit të saj.

Aksioma III

Rezultantja e dy forcave konkurruese është e barabartë në vlerë dhe në drejtim me diagonalen e paralelogramit të ndërtuar mbi këto forca si në fig.1.2.1:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Rrjedhim nga aksioma III

Në qoftë se një trup i ngurtë ndodhet në ekujlibër nën veprimin e tri forcave që shtrihen në një plan, atëherë drejtimet e këtyre forcave priten në një pikë.

Aksioma IV

Forcat e veprimit të ndërsjellë të dy trupave kanë vlera të barabarta, kanë drejtim të njëjtë dhe kahe të kundërta.

Aksioma V

Nëse një trup i shformushëm ndodhet në ekujlibër nën veprimin e një sistemi forcash, po të bëhet apsolutisht i ngurtë, ekujlibri i tij nuk prishet.

Aksioma VI

Çdo trup jo i lirë mund të shikohet si i lirë, në qoftë se, me mend, e lirojmë nga lidhjet, duke e zëvendësuar veprimin e tyre me forcat e kundërveprimit të lidhjeve.

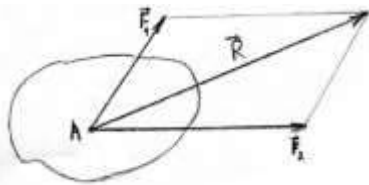


fig.1.2.1

1.3. Llojet e lidhjeve

Kushtet që pengojnë trupin për të lëvizur lirisht, quhet lidhje. Lidhjet mund të jenë të llojeve të ndryshme.

- *Mbështetje e lirë* është lidhja e cila pengon lëvizjen e trupit në drejtimin pingul me planin e mbështetjes.

- *Mbështetje e lëvizshme* është lidhja e cila lejon zhvendosjen e lirë të trarit në drejtimin gjatësor, si dhe rrotullimin e tij rreth pikës së mbështetjes.

- *Mbështetje e palëvizshme (çernierë)* është lidhja që lejon vetëm rrotullimin e trarit rreth bushtit të mbështetjes.

- *Mbërthim i plotë (inkastrim)* është lidhja që pengon zhvendosjen dhe rrotullimin e trarit.

- *Lidhje me fije* është lidhja që realizohet me trupa të përkulshëm. Në këto lidhje fprat e kundërveprimit zbatohen në pikat e lidhjes.

Tema mësimore nr.2: Sistemet e forcave konkurente plane dhe kushtet e ekujlibrit të tyre

2.1. Forcat konkurente në plane

Sistemi më i thjeshtë i forcave konkurruese në plan përbëhet prej dy forcash P_1 dhe P_2 .

Sistemi i përbërë nga një numër i çfardoshëm forcash konkurruese, mund të zëvendësohet me një forcë të vetme që është rezultatja e tyre, që kalon nëpër pikën e prerjes, ose sipas rregullës së paralelogramit.

Një sistem i tërë forcash konkurruese në plan, i përbërë nga katër forca (P_1, P_2, P_3, P_4) paraqitet si në fig.2.1.1. Në fillim i zhvendosim të gjitha forcat në pikën O (pika e prerjes së tyre) dhe

më pasë sipas rregullës së paralelogramit, i mbledhim forcat dy e nga dy. Pra rezultatja \mathbf{R} e sistemit të forcave (P_1, P_2, P_3, P_4) do të jetë:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4$$

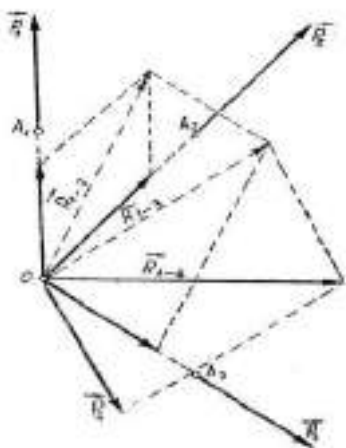


fig.2.1.1.

2.2. Kushtet e ekulibrit dhe shumëkëndëshi i forcave

Një sistem forcash konkurruese në plan të jetë në ekulibër, duhet që rezultatja e tyre të jetë e barabartë me zero: $R = 0$

Gjetja e rezultantes së një sistemi forcash konkurruese në plan me rregullën e paralelogramit nuk është shumë e përshtatshme për qëllimet praktike. Kur kemi vetëm dy forca për të gjetur rezultanten mjafton të ndërtohet trekëndëshi i forcave ABC.

Një sistem i tërë forcash konkurruese në plan, i përbërë nga katër forca (P_1, P_2, P_3, P_4) për të gjetur rezultanten mjafton të ndërtohet *shumëkëndëshi i forcave*.

Për gjetjen e rezultantes R të katër forcave konkurruese në plan, mjafton që te pika B e mbarimit të forcës P_1 të vendosen njëri pas tjetrit vektorët: BC, CD, DE, përkatësisht të barabartë dhe paralel me forcat P_2, P_3, P_4 . Segmenti që mbyll vijën e thyer ABCD, jep rezultante \mathbf{R} . Kjo rezultante është e barabartë në gjatësi (vlerë) me segmentin që mbyll shumëkëndëshin, ajo drejtohet nga fillimi i shumëkëndëshit drejtë mbarimit të tij, në kah të kundërt me kahun e vazhduar të forcave.

Një sistem forcash konkurruese në plan është në ekulibër, në rast se shumëkëndëshi i forcave mbyllet, d.m.th. origjina e forcës së parë P_1 përputhet me mbarimin e forcës së fundit P_4 , si në fig.2.2.1 dhe fig.2.2.2

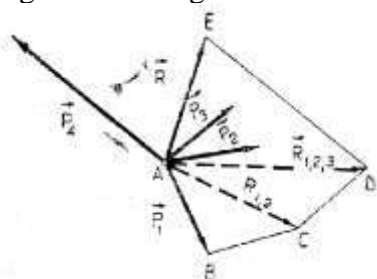


fig.2.2.1

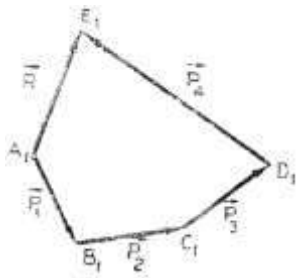


fig.2.2.2

2.3. Projektioni i forcave në bosht

Projektioni i forcës P në boshtin X quhet vlera algjebrike e vektorit A_1B_1 e përcaktuar nga këmbët e pinguleve të lëshuara nga fillimi dhe mbarimi i forcës mbi këtë bosht.

Në fig.2.3.1. boshti X quhet boshti i projektionit. Pikat A_1 dhe B_1 quhet fillimi dhe mbarimi i i projektionit të vektorit AB .

Projektioni është pozitiv në qoftë se kahu i vektorit A_1B_1 është i njëjtë me kahun pozitiv të boshtit. Projektioni është negativ në qoftë se kahu i vektorit A_1B_1 është i kundërt me kahun pozitiv të boshtit.

Projektioni i forcës P në boshtin X e shënojmë me $P_x = P \cdot \cos \alpha$

Projektioni i forcës P në boshtin Y e shënojmë me $P_y = P \cdot \sin \alpha$

Vlera e forcës P llogaritet me teoremën e Pitagorës $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$

Drejtimi dhe kahu i forcës P gjendet me ndihmën e funksioneve trigonometrike të sinusit dhe kosinusit të këndit α që është këndi ndërmjet forcës P dhe kahut pozitiv të boshtit.

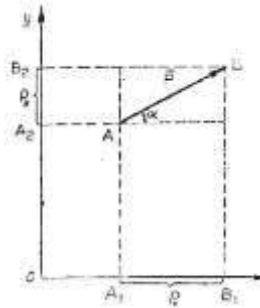


fig.2.3.1

2.4. Mënyra analitike e mbledhjes së forcave

Shenojmë me R rezultanten e forcave P_1, P_2, P_3 që del nga ndërtimi i shumëkëndëshit të forcave $ABCD$. Projektionet e forcave në boshtin X në fig. 2.4.1 janë:

$$P_{1x} = X_1 = ab$$

$$P_{2x} = X_2 = bc$$

$$P_{3x} = X_3 = -cd$$

Projektioni i rezultantes $R_x = X_R = ad$

Po të mbledhim projektionet e tri forcave do të kemi: $X_1 + X_2 + X_3 = ab + bc - cd = ad = X_R$

Kur numri i forcave është n atëherë do të kemi:

$$X_R = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X$$

$$Y_R = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y$$

Duke njohur projektionet e rezultantes gjrjmë

$$R_x = \sqrt{X^2_R + Y^2_R} \quad (1)$$

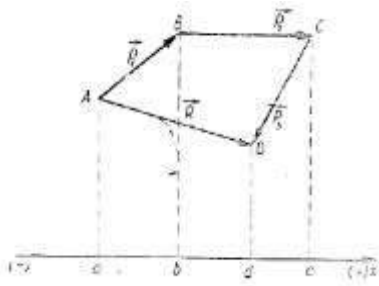


fig. 2.4.1

2.5. Ekuacionet e ekuilibrit

Kushti analitik i ekuilibrit do të jetë kur rezultatja R të jetë e barabartë me zero.

Që rezultatja R të jetë e barabartë me zero, duhet që shprehja (1) brenda rrënjës katrore të jetë zero, por meqë kufizat X_R dhe Y_R janë në katror, atëherë shuma e tyre do të jetë pozitive. Që rezultatja të jetë zero, duhet që çdo kufizë e ndodhur brenda rrënjës katrore të jetë zero, nga ku përcaktohen kushtet analitike të ekuilibrit të forcave konkurente:

$$\mathbf{X}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i = 0$$

$$\mathbf{Y}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i = 0$$

Këto quhen ekuacionet e ekuilibrit të forcave konkurente

Ekuacionet e më sipërmë lexohen: *Shuma algjebrike e projeksioneve të forcave në boshtin përkatës është e barabartë me zero.*

2.6. Momenti i forcës kundrejt një pike

Kur mbi një trup vepron një forcë, kjo do të shkaktojë trupit një lëvizje drejtvizore, në rast se trupi nuk pengohet në lëvizjen e tij.

Mbi një pllakë metalike vepron një forcë P dhe kur pllaka është e lirë, ajo do të lëviz sipas drejtimit të forcës. Përkundrazi kur në pllakë është hapur një vrimë në të cilën është ngulur një gozhdë, pllaka nuk do të mundë të lëvizë lirisht sipas një vije të drejtë, pr do të rrotullohet rreth pikës O .

Lëvizja drejtvizore do të zëvendësohet me lëvizje rrethore. Efekti i rrotullimit do të jetë aq i madh sa më e madhe të jetë forca dhe sa më largë të jetë pika O nga vija e veprimit të forcës. Këtë largësi e shënojmë me h . Kur kjo largësi bëhet zero, pllaka nuk do të rrotullohet më, pasi në pikën O do të lindin forca e kundërveprimit, e cila ekuilibron forcën P .

Momenti i forcës kundrejt një pike të dhënë është i barabartë me prodhimin e vlerës së kësaj force me gjatësinë e pingules së lëshuar nga kjo pikë mbi drejtimin e forcës.

Krahu i forcës quhet gjatësia e pingules së hequr prej pikës së dhënë mbi drejtëzën e veprimit të forcës si në fig.2.6.1. Atëherë përkufizimi i mësipërm mund të shprehet kështu:

Momenti i forcës kundrejt një pike është i barabartë me prodhimin e vlerës së forcës me krahun e saj.

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{P}) = \mathbf{P} * \mathbf{h}$$

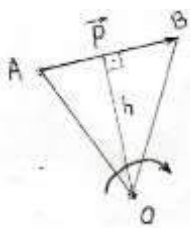


fig.2.6.1

Nga përkufizimi i momentit të forcës kundrejt një pike themi:

- *Momenti i forcës kundrejt pikës do ta quajmë pozitiv, në qoftë se kjo forcë e rrotullon*

trupin rreth pikës së dhënë, në krahun e rrotullimit të akrepave të orës.

- *Momenti i forcës kundrejt pikës do ta quajmë negativ, në qoftë se kjo forcë e rrotullon trupin rreth pikës së dhënë, në krahun e rrotullimit të kundërt të akrepave të orës.*

Tema mësimore nr.3: Sistemet e forcave paralele plane

3.1. Mbledhja e dy forcave paralele me kahe të njëjta dhe me kahe të kundërta

Forcat, drejtimit e të cilave janë paralele dhe shtrihen në një plan, *formojnë një sistem forcash paralele plane*. Mbi një trup të ngurtë veprojnë dy forca paralele P_1 dhe P_2 me kahe të njëjtë, forca P_1 vepron në pikën A dhe forca P_2 vepron në pikën B.

Rezultantja e tyre R është e drejtuar sipas kësaj drejtëze, ndërsa vlera e saj është sa shuma e vlerave të forcave të dhëna P_1 dhe P_2 . $\rightarrow R = P_1 + P_2$

Pika e zbatimit të rezultantes është pika C e cila caktohet nga raporti:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}$$

Rezultantja e dy forcave paralele dhe me kahe të njëjta është paralele me këto forca dhe ka të njëjtin kah me to, vlera e rezultantes është e barabartë me shumën e vlerave të forcave të dhëna, kurse vija e veprimit e rezultantes e ndanë largësinë midis pikave të zbatimit të forcave të dhëna në pjesë që janë në përpjestim të zhdrejtë me këto forca.

Mbi një trup të ngurtë veprojnë dy forca paralele P_1 dhe P_2 me kahe të kundërt, $P_2 > P_1$, forca P_1 vepron në pikën A dhe forca P_2 në pikën B.

Rezultantja e tyre R është e drejtuar sipas kësaj drejtëze, me kah si kahu i forcës më të madhe P_2 , vlera e saj është me diferencën e vlerave të forcave të dhëna P_1 dhe $P_2 \rightarrow R = P_2 - P_1$

Pika e zbatimit të rezultantes është pika C e cila caktohet nga raporti:

$$\frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{R}{AB}$$

Rezultantja e dy forcave paralele dhe me kahe të kundërta është paralele me këto forca dhe ka kahun e forcës më të madhe, vlera e rezultantes është e barabartë me diferencën e vlerave të forcave të dhëna, kurse vija e veprimit e rezultantes e ndanë largësinë midis pikave të zbatimit të forcave të dhëna së jashtmi (nga ana e forcës më të madhe) në dy pjesë, që janë në përpjestim të zhdrejtë me këto forca.

3.2. Teoria e çifteve që shtrien në plan dhe vetitë e çiftit të forcave

Çift forcash quhet një sistem i përbërë prej dy forcash paralele P_1 dhe P_2 me vlera të barabarta dhe kahe të kundërta.

Vlera e rezultantes së forcave paralele është e barabartë me shumën algjebrike të tyre. Meqenëse forcat që përbëjnë çiftin janë të barabarta në vlerë dhe kanë kahe të kundërta, rezultantja e tyre është e barabartë me zero, pra çifti i forcave nuk mund të japë trupit lëvizje drejtvizore.

Le të shikojmë tani ç' lëvizje i shkaktojnë trupit këto dy forca. Le të marrim një pikë të çfarëdoshme A në planin e forcave që ndodhet në largësi $(d+b)$ nga drejtimi i forcës së parë dhe në largësi b nga drejtimi i forcës së dytë. Duke ditur që momenti i rezultantes është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të forcave përbërëse shkruajmë:

$$m_R = P(d+b) - P*b = P*d$$

Barazimi i mësipërm tregon se pavarësisht që rezultantja e forcave është e barabartë me zero, momenti resultant $m_R = P*d$ do të shkaktojë trupit një lëvizje rrotulluse dhe do të ketë vlerë

konstante meqenëse pika A u zgjodh një pikë e çfardoshme në plan. Athere prodhimi i njërës prej forcave të çiftit me kahun është momenti i çiftit $\rightarrow \mathbf{m} = \pm \mathbf{P} * \mathbf{d}$
 Shenja e momentit merret plus në qoftë se çifti rrotullon trupin në kahun e akrepave të orës, dhe shenja minus në rast të kundërt.

3.3 Vetitë e çiftit të forcave

- Çifti i forcave nuk ka rezultante, rrjedhimisht nuk mund të zëvendësohet nga një forcë, veprimi i çiftit përcaktohet nga vlera e momentit të tij.
- Gjëndja e trupit nuk priset, kur çiftin e zhvendosim në planin e tij, në çfardo pozicioni.
- Çdo çift mund të zëvendësohet në planin e tij me një çift tjetër që ka moment të barabartë në vlerë dhe kah rrotullimi, pa ndryshuar efektin e tij mbi trup.
- Për çiftet që shtrihen në një plan, momenti i çiftit rezultat është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të çifteve përbërëse $\mathbf{m}_R = \sum \mathbf{m}_i$
- Një system çiftesh është në ekujlibër, në qoftë se shuma algjebrike e momenteve të sistemit të çifteve është e barabartë me zero. Kushti i ekujlibrit të çifteve në plan do të shprehet: $\sum \mathbf{m}_i = 0$

3.4. Shembuj

1) Gjeni rezultatet e dy forcave paralele me krah të kundërta ku $P_1=300\text{ N}$ dhe $P_2=150\text{ N}$, me largësi 15 cm nga njëra tjetra, si edhe të gjendet largësia e rezultantes nga forca më e madhe si në fig.3.4.1

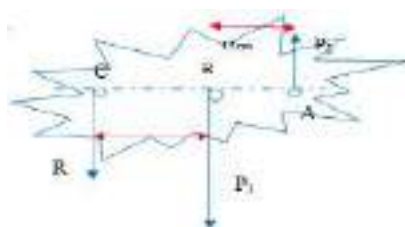


fig.3.4.1

Zgjidhja

Vlera e Rezultantes R së forcave P_1 dhe P_2 është e barabartë me diferencën e tyre:

$$R = P_1 - P_2 = 300 - 150 = 150\text{ N}$$

Gjejmë largësinë e rezultantes nga forca e parë:

$$\frac{P_2}{BC} = \frac{R}{AB} ; \frac{150}{BC} = \frac{150}{15} ; \rightarrow BC = \frac{150 * 15}{150} = 15\text{ cm}$$

2) Të gjendet vlera e momentit të çiftit të forcave në fig.3.4.2 kur kemi Forca $P = 200\text{ N}$, $AB = 6\text{ m}$ dhe këndi $\alpha = 45^\circ$

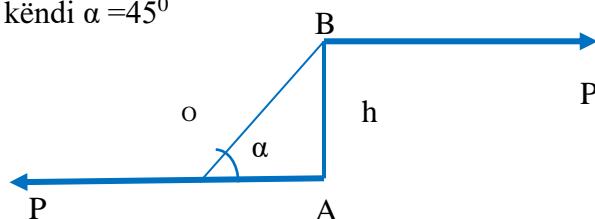


fig.3.4.2

Gjejmë krahun e çiftit të forcave :

$$\frac{h}{AB} = \sin \alpha ; h = AB * \sin \alpha = 6 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.24\text{ m}$$

Momenti i çiftit të forcave është $\rightarrow m = 200 \text{ N} \cdot 4.24 = 848 \text{ Nm}$

Tema mësimore nr.4: Sistemi i çfarëdoshëm i forcave plane dhe kushtet e ekuilibrit të tyre

4.1. Reduktimi i një sistemi të çfarëdoshëm forcash plane në një forcë dhe në moment kryesor.

Në rastin e përgjithshëm sistemi i forcave plane përbëhet nga një numër i çfarëdoshëm forcash, që shtrihen në mënyrë të çfarëdoshme në plan. Reduktimi i forcave të dhëna në një sistem më të thjeshtë mund të bëhet me mënyrëm e mbledhjes vektoriale së njëpasnjëshme të forcave ose me rregullën e paralelogramit. Në këtë mënyrë do të marrim ose një rezultante të vetme të sistemit, ose në një çift forcash, ose në një sistem forcash në ekuilibër.

Teoremë: Një forcë P , që vepron në një trup të ngurtë, mund të zhvendoset paralelisht me veten në çdo pikë të trupit, me kusht që efektit të forcës në pozicionin e ri t'i shtohet efekti i çiftit të forcave me moment të barabartë me momentin e forcës kundrejt pikës ku zhvendoset ajo.

Vërtetim: Le të jetë dhënë forca P e zbatuar në pikën A . Në pikën B të trupit, që ndodhet larg vijës së veprimit të forcës P në një largësi d , zbatojmë dy forca P' dhe P'' me kahe të kundërta, që kanë vlerë të barabartë me forcën e dhënë P dhe janë paralele me të.

Sipas aksiomës së II të statikës gjëndja e trupit nuk ndryshon. Sistemi prej tri forcash mund të shikohet si bashkëveprim i forcës P' të zbatuar në pikën B dhe të çiftit (P, P'') me moment të barabartë me $P \cdot d$.

4.2. Reduktimi i tre Forcave

Këtë teoremë e përdorim për të bërë reduktimin në një pikë të të gjitha forcave të sistemit të çfarëdoshëm. Shqyrtojmë reduktimin e tri forcave P_1, P_2, P_3 zhvendosim forcat e dhëna në një pikë E të planit. Kjo pikë quhet *qëndër reduktimi* i sistemit. Si rezultat do të kemi një sistem prej tri forcash që priten në një pikë E dhe tri çifte bashkëvepruese.

$$m_1 = P_1 \cdot d_1$$

$$m_2 = P_2 \cdot d_2$$

$$m_3 = P_3 \cdot d_3$$

Tri forcat konkurente në pikën E mund të zevëndësohen me një forcë të vetme R' , që quhet rezultantja e tyre duke ndërtuar shumëkëndëshin e forcave.

$$R = P_1 + P_2 + P_3$$

$$M_R = P_1 \cdot d_1 + P_2 \cdot d_2 + P_3 \cdot d_3$$

Momenti i çiftit rezultat është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të forcave të sistemit kundrejt pikës $E \rightarrow M_R = \sum M_E(P)$

Sistemi i dhënë prej tri forcash është i njëvlefshëm me një forcë R' që quhet *forcë kryesore* dhe çifti i momentit M_R quhet *momenti kryesor i sistemit*.

4.3. Rastet e reduktimit

Rasti I. Kur sistemi mund të reduktohet në një forcë kryesore $R \neq 0$ dhe momenti kryesor $M_R = 0$. Në këtë rast kemi të bëjmë me një sistem forcash konkurente plane.

Rasti II. Sistemi mund të reduktohet me një forcë kryesore $R = 0$ dhe momenti kryesor $M_R \neq 0$, dmth forcat e reduktuara në pikën e ekuilibrit ekuilibrohen dhe sistemi reduktohet në një çift të vetëm forcash.

Rasti III. Sistemi mund të reduktohet në një forcë kryesore $R = 0$ dhe *momenti kryesor* $M_R = 0$, në këtë rasti sistemi është në ekuilibër.

Kushti ekuilibrit të sistemit të çfarëdoshëm të forcave në plan është forca kryesore e sistemit dhe

momenti kryesor kundrejt çfarëdo pike të jenë të barabarta me zero.

4.4 Ekuacionet e ekuilibrit të sistemit të forcave në plan.

Sistemi është në ekuilibër kur $R=0$ dhe $M_R=0$ Kushti i ekuilibrit ndryshe shprehet në këtë formë:

$$M_R = \sum M_E(P) = 0$$

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

Të tre këto ekuacione quhen ekuacionet e ekuilibrit të sistemit të çfarëdoshëm të forcave në plan. Nëse forca është paralele me boshtin Y dhe pingul me boshtin X ekuacionet e ekuilibrit janë vetëm dy sepse projektionet e forcës në boshtin X janë zero.

$$\sum M_E(P) = 0 ; \quad \sum M_A(P) = 0 ;$$

$$\text{dhe } \sum Y = 0 \quad \text{ose} \quad \sum M_B(P) = 0$$

4.5. Kuptimi i trarit dhe ngarkesa e tij.

Trari është element mbajtës i mbështetur në dy ose më shumë lidhje, që punojnë në përkulje nën veprimin e forcave të cilat ndodhen në rrafshin që kalon nëpër boshtin e tij.

Paraqitja e traur me lidhjet e tij nën veprimin e forcave është si në fig.4.5.1.(a,b,c,d)

- a) trau i mbështetur lirisht, mbi të vepron ngarkesa q uniformisht e shpërndarë;
- b) trau i mbështetur lirisht, mbi të vepron forca P në qendër të traut;
- c) trau mbështetje plotë (inkastrim), mbi të vepron ngarkesa q uniformisht e shpërndarë;
- d) trau mbështetje plotë (inkastrim), mbi të vepron forca P në qendër të traut.

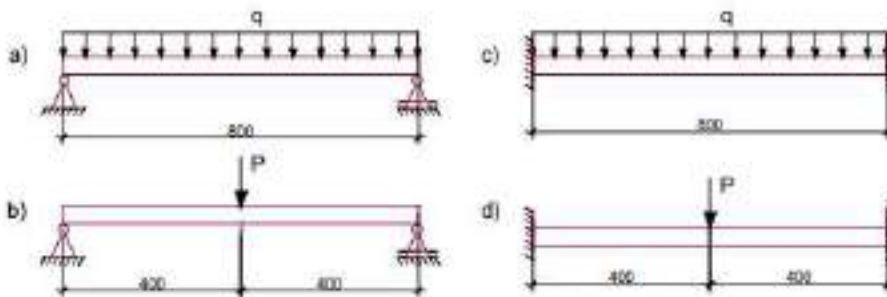


fig.4.5.1.

4.6. Shembuj

1. Të caktohet kundërveprimet në mbështetje e trarit, si në fig.4.6.1

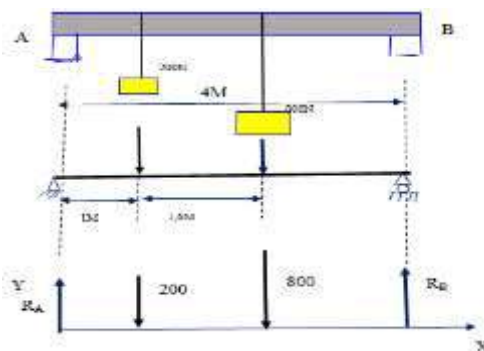


fig.4.6.1

Për të ndërtuar skemën njehsuese të trarit heqim mbështetjen nga trau dhe vëmë shënjën

dalluese të lidhjes përkatëse në skajet e tij A dhe B. Në tra veprojnë kundërvepri R_A dhe R_B . Drejtimet e tyre janë pingul me traun dhe me kahe të kundërta me forcat që veprojnë në tra, ndaj përdorim **ekuacionet e ekuilibrit**, kundrejt pikës A dhe B:

Ekuacioni i momenteve shkruhet: $\sum M_B(P) = R_A \cdot 4 - 200 \cdot 3 - 800 \cdot 1.4 = 0$

Nga ku del: $R_A = 1720/4 = 430 \text{ N}$

$\sum M_A(P) = R_B \cdot 4 + 800 \cdot 2.6 + 200 \cdot 1 = 0$

Nga ku del: $R_B = 2280/4 = 570 \text{ N}$

2. Të caktohet kundërveprimet në mbështetjet e trarit, si në fig. fig.4.6.2

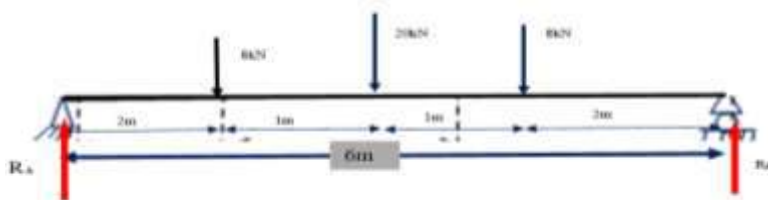


fig.4.6.2

Nga figura shikojmë që të gjitha forcat janë paralele së bashku me kundërveprimet R_A dhe R_B . Nga zbatimi i ekuacionit të momenteve kundrejt pikës A dhe B shkruajmë **ekuacionet e ekuilibrit**:

$\sum M_B(P) = R_A \cdot 6 - 8 \cdot 4 - 20 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 0$

Nga llogaritjet $R_A = 108/6 = 18 \text{ kN}$

$\sum M_A(P) = R_B \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 0$

Nga ku del se $R_B = 108/6 = 18 \text{ N}$

Tema mësimore nr.5: Kapriatat

5.1. Njohuri të përgjithshme

Kapriatë quhet një konstruksion i përbërë prej elementesh të drejta e të lidhura ndërmjet tyre me çerniera. Elementet e drejta quhen brinjë ose shufra.

Kapriatat janë sisteme gjeometrike të rrafshëta si në fig.5.1.1.

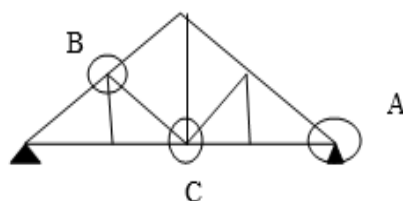


fig.5.1.1

Bashkimet e brinjëve formojnë nyjat e kapriatës, p.sh: nyjat A, B, C, etj. Boshtet e brinjëve të secilës nyjë duhet të takohen në një pikë, që quhet qëndër e nyjës.

Kapriatat e rrafshëta ngarkohen nëpër nyje, kurse drejtimi i brinjëve përcakton dhe drejtimin e forcave (sforcimeve) që lindin nën veprimin e ngarkesave. Nyjet, do t'i mendojmë si çerniera ideale, pra, forcat e fërkimit në to nuk do të merren parasysh.

Gjatë llogaritjeve statike të kapriatave të rrafshëta merren parasysh këto pika:

- Nyjat e kapriatës së rrafshët mendohen si çerniera ideale.
- Kapriatat janë sisteme të rrafshëta, ku boshtet e brinjëve dhe forcat që veprojnë në to janë në të njëjtin rrafsh.

- c. Përcaktimi i forcave në shufrat e kapriatës së rrafshët bëhet sipas skemës së saj të pashformuar.
- d. Ngarkesat mbi kapriatën e rrafshët transmetohen vetëm në nyjet, ku si ngarkesë merret parasysh edhe vetë pesha e kapriatës.

5.2. Kushtet e pandryshueshmërisë gjeometrike

Çdo kapriatë e rrafshët, që të jetë statikisht e qëndrueshme, duhet të jetë e formuar nga sisteme gjeometrikisht të pandryshueshme. Sistemi kryesor gjeometrikisht i pandryshueshëm është trekëndëshi. Pranohet pa vërtetim se kushti i përgjithshëm i pandryshueshmërisë së kapriatës gjeometrike është:

$$b=2n-r$$

b - numri i brinjëve të kapriatës;

n - numri i nyjave të kapriatës;

r - numri i reaksioneve për strukturat e rrafshëta është i barabartë me 3.

Për kapriatat e rrafshëta kemi: $b=2n-3$

Kushti i mësipërm është i domosdoshëm, por jo i mjaftueshëm, për sigurimin e qëndrueshmërisë së kapriatës.

Kur $b=2n-3$, atëherë themi se kapriata e rrafshët është statikisht e qëndrueshme, sepse $(b+3)$ forca të brinjëve të brendshme dhe të reaksioneve të mbështetjeve mund të përcaktohen tërësisht nga $2n$ ekuacione të ekuilibrit, por vetëm nëse njihen ngarkesat e jashtme dhe gjeometria e kapriatës së rrafshët.

Ky është numri më i vogël i brinjëve për sigurimin e qëndrueshmërisë statike të kapriatës së rrafshët.

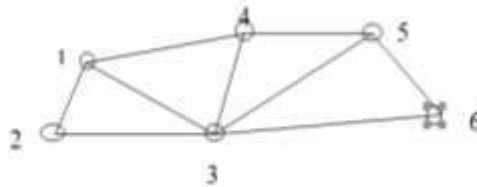


fig 5.2.1

Duke analizuar sistemin e paraqitur në fig.5.2.1. për verifikimin e qëndrueshmërisë së tij, del se numri i brinjëve të tij është $b = 9$, kurse numri i nyjave është $n = 6$

Po të zbatojmë formulën për kushtin e pandryshueshmërisë gjeometrike për figurën mësipër kemi:

$$b=2n-3$$

$n = 6$ (nga numërimi)

$b_{num}= 9$ (nga numërimi)

Pas zëvendësimit të $n=6$ në formulë, do të kemi: $b_{llog}=2*6 -3=9$

Pra, si numërimi dhe llogaritja, del: $b_{num}=9$ dhe $b_{llog}=9$

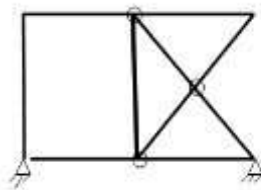


fig.5.2.2

Siç shihet edhe më sipër, kushti u plotësua, por nuk mjafton, sepse pjesa e majtë e sistemit të dhënë në fig 5.2.2 është e shformueshme, meqenëse është ndërtuar nga një katërkëndësh me një në formën e çernierës.

Që sistemi të jetë i qëndrueshëm, duhet të plotësojë kushtin “të ndërtohet nga elemente gjeometrikisht të pandryshueshme”, dhe një element i tillë është trekëndëshi, sepse ai është figura më e thjeshtë gjeometrike që, kur gjatësitë e brinjëve janë të fiksuara, nuk e ndryshon

formën e tij. *Sistemet e ndërtuara prej trekëndëshave janë të pandryshueshme dhe quhen sisteme të thjeshta.*

5.3. Fusha e përdorimit të kapriatave të rrafshëta

Kapriatat e rrafshëta janë konstruksione shumë të përdorshme në ndërtimin e urave, në ndërtimet industrial dhe në ato civile, në përgatitjen e konstruksionit të shtyllave të tensionit të lartë etj. Ato përgatiten prej disa lloje materialesh, si druri, metali, të përziejera me dru dhe metal, si dhe betonarme.

Brinjët që formojnë një kapriatë ndahen në breza dhe në rrjetin e brendshëm. Breza quhen brinjët e vendosura në perimetrimin e jashtëm të kapriatës dhe janë:

- të sipërm;
- të poshtëm.

Rrjeti i brendshëm përbëhet nga brinjët, të cilat lidhin brezin e sipërm me brezin e poshtëm. Sipas pozicionit të vendosjes së tyre në kapriatë, brinjët janë:

- vertikale;
- diagonal.

5.4. Klasifikimi i kapriatave dhe elementët e saj

Kapriatat klasifikohen ose ndahen sipas kriterëve të mëposhtme:

- sipas formës së brezit të sipërm dhe atij të poshtëm;
- sipas tipit të formës që ka rrjeti i brinjëve;
- sipas kushteve të mbështetjes;
- sipas përdorimit të struktues.

Në fig.5.4.1, fig.5.4.2 dhe fig.5.4.3 tregohen qartë disa lloje kapriatash, duke u bazuar në kriteret e përmendura më lart.

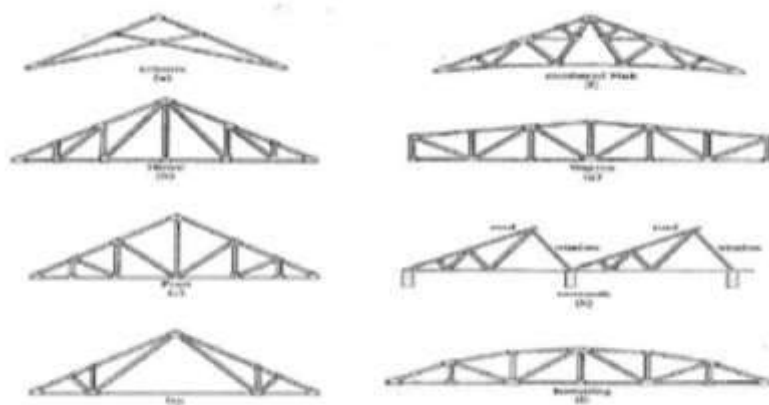


fig.5.4.1

Sipas formës së brezit të sipërm dhe brezit të poshtëm, kapriatat emërtohen në këtë mënyrë:

- kapriata me breza paralele,
- kapriata në formë trekëndëshe, kur brezi i sipërm dhe ai i poshtëm formojnë një trekëndësh;
- kapriata në formë shumëkëndëshe.

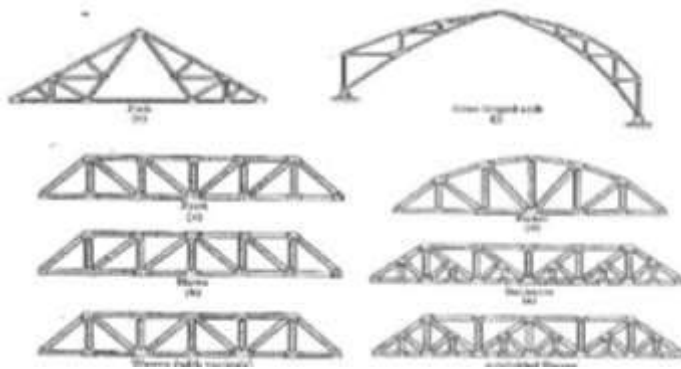


fig.5.4.2

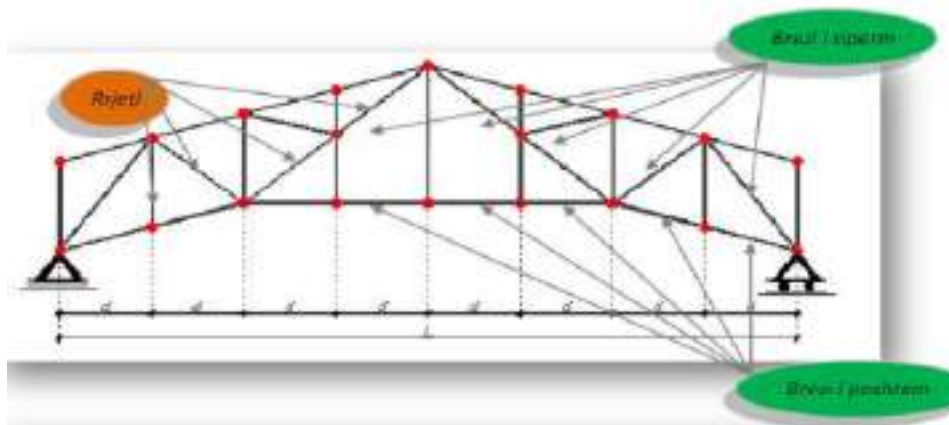


fig.5.4.3

Hapësirë e kapriatës quhet largësia midis dy pikave të mbështesjes së kapriatës. Ajo shënohet me simbolin l .

Lartësi e kapriatës me breza paralele quhet largësia nga aksi i brezit të sipërm deri tek ai i poshtëm. Ajo shënohet me simbolin h . Lartësi e kapriatës në formë trekëndëshi dhe e asaj në formë shumëkëndëshi quhet largësia nga kulmi i kapriatës deri tek aksi i brezit të poshtëm si në fig.5.4.3.

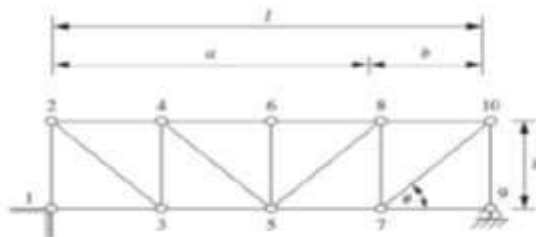


fig.5.4.3

5.5. Llogaritja e sforcimeve në brinjët e kapriatave

Për llogaritjen e forcave (sforcimeve) që lindin në brinjët e një kapriate ka metoda të shumta. Njëra prej tyre është metoda analitike e Riterit, se një metodë tjetër është metoda e veçimit të nyjës. Metoda Riter bazohet në metodën e prerjes së kapriatës në dy pjesë, duke i zëvendësuar brinjët e prera me sforcimet që lindin në to, por duke plotësuar edhe kushtin e mëposhtëm: *ndarja në pjesë të bëhet në mënyrë të tillë, që të priten tri brinjë që nuk janë konkurrenente (nuk janë paralele) me njëra tjetrën.*

Kështu, secila pjesë e veçantë do të jetë në ekuilibër nën veprimin e forcave të jashtme dhe të brendshme (sforcimeve) në brinjët e prera dhe për llogaritjen e saj do të përdoren metodat e

zakonshme të statikës për gjendjen e ekuilibrit.

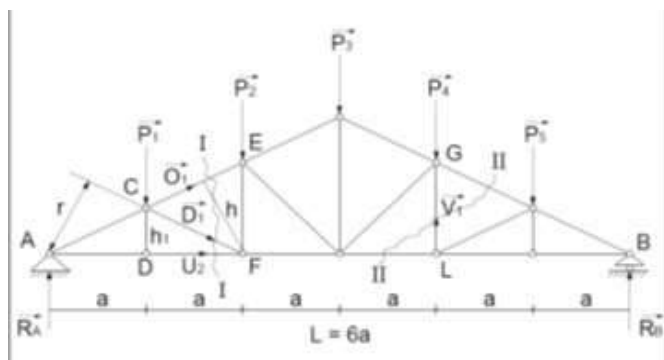


fig.5.5.1

Në fig. 5.5.1. për një nga pjesët e prera të kapriatës mund të shkruajmë tri ekuacionet e ekuilibrit të momenteve të të gjitha forcave të jashtme dhe të brendshme që veprojnë në këtë pjesë të prerë të marrë në shqyrtim. Përdorim ekuacionin e shumës së momenteve të forcave e cila duhet të jetë e barabartë me zero.

Si pika momentesh do të merren të quajturat **Pikat Riter**, të cilat formohen nga ndërprerja e dy prej drejtimeve të brinjëve të prera. Kështu, në çdo ekuacion hyn vetëm një e panjohur, gjë që na jep mundësinë e caktimit të sforcimit në brinjën e tretë.

Për të gjetur sforcimin O_2 në brinjën CE të kapriatës në formë trekëndëshi të dhënë, duhet të

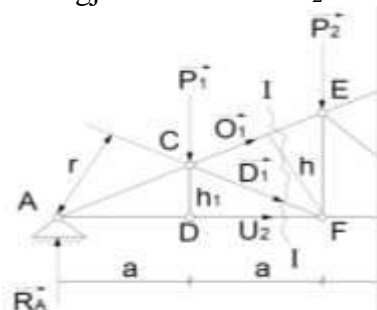


fig.5.5.2

kalojmë një rrafsh imagjinar të prerjes I-I, i cili t'i pretë të tria brinjët, brinjën CE, CF dhe DF. Nga fig.5.5.2. shohim se dy brinjët e tjera, CF dhe EF, takohen në pikën F. Pikërisht kjo pikë është dhe pika Riter, që do të na shërbejë për përcaktimin e sforcimit O_2 .

5.6. Përcaktimi i sforcimeve në kapriatën e rrafshët në formë trekëndëshi

Kemi dy llojes sistemesh kapriatash :

- a- Statikisht i caktuar
- b- Statikisht i pacaktuar

- në brinjët e brezit të sipërm do t'i emërtojmë si $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n$; Sistemi i kapriatës quhet statikisht i caktuar, kur numri i brinjëve është $b = 2n - 3$, dhe kur numri i brinjëve është më i madh se $2n - 3$, sistemi i kapriatës quhet statikisht i pacaktuar.

Marrëveshje : Ato sforcime që shkaktojnë tërheqjen e brinjëve të kapriatës, do t'i quajmë sforcime pozitive, kurse ato sforcime që shkaktojnë shtypjen e brinjëve, do t'i quajmë sforcime negative.

Sforcimet në brinjët e kapriatës do t'i emërtojmë:

- në brinjët diagonale do t'i emërtojmë si : $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n$;
- në brinjët vertikale do t'i emërtojmë si $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n$;
- në brinjët e brezit të poshtë do t'i emërtojmë si : $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n$;

Le të përcaktojmë sforcimet e mëposhtme që lindin në pjesën e prerë të kapriatës, e cila është treguar në fig. 5.5.3, pra do të llogarisim :

- sforcimin O_2 , i cili lind në brinjën CE të brezit të sipërm ;
- sforcimin D_1 , i cili lind në diagonalen CF ;
- sforcimin U_2 , i cili lind në brinjën DF të brezit të poshtëm ;
- sforcimin V_4 , i cili lind në brinjën vertikale GL (të fig. 5.5.1).

5.7. Përcaktimi i sforcimeve në kapriatën në formë trekëndëshi

Përpara përcaktimit të sforcimeve, të kontrollojmë nëse sistemi është statikisht caktuar apo i pacaktuar, sepse gjeometrikisht ai është i pandryshueshëm. Zbatojmë formulën e mëposhtme : **$b=2n-3$**

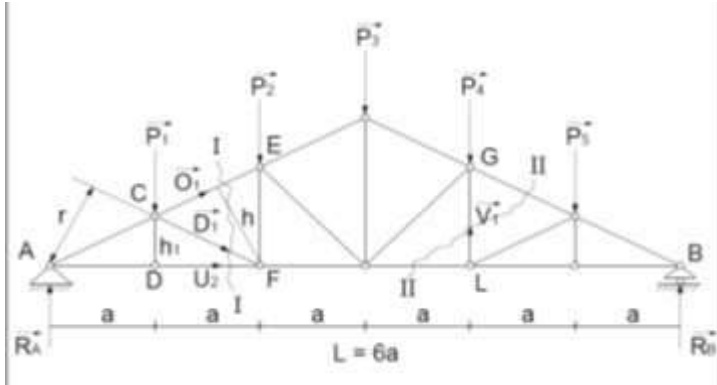


fig. 5.7.1.

Nga një numërim i përbërësve të fig. 5.7.1. gjejmë se numri i brinjëve dhe numri i nyjave të kapriatës janë përkatësisht $b_{\text{num}} = 21$ dhe $n = 12$.

Nga zëvendësimi formulën **$b=2n-3$** del se numri i brinjëve që duhet të ketë kapriata për të qenë statikisht e caktuar duhet të jetë : **$b_{\text{log}} = 2*12-3 = 21$**

Pra, si nga numërimi i brinjëve, ashtu dhe nga llogaritja e tyre del se: **$b_{\text{num}} = b_{\text{log}} = 21$** , gjë që tregon se sistemi është statikisht i përcaktuar.

Për të përcaktuar sforcimet O_2 , D_1 , U_2 , duhet :

- të bëjmë prerjen e tri brinjëve të kapriatës me një rrafsh prerës imagjinar I-I, por gjithmonë duke respektuar kushtin që duhet të plotësohet në këtë rast ;
- të vendosim vektorët e sforcimeve në brinjët e prera ;
- të studiojmë ekuilibrin e anës së majtë të kapriatës nën veprimin e forcave R_A , P_1 , dhe të sforcimeve O_2 , D_1 , U_2 .

Në fillim do të supozojmë se të tria brinjët punojnë në tërheqje. Për të gjetur vlerën e sforcimit U_2 , në brinjën DF, duhet të bëjmë shumë algjebrike të momenteve të forcave kundrejt pikës C, e cila është pikë Riter vetëm për sforcimin në brinjën DF. Në këtë rast ekuacioni i ekuilibrit do të ketë trajtën: $\Sigma M_C(P)=0 \rightarrow R_A * a - U_2 * h_1 = 0$

Nga ku gjejmë: $U_2 = R_A * a / h_1$

Për të llogaritur vlerën e sforcimit O_2 të brinjës CE, duhet të shkruajme ekuacionin e momenteve kundrejt pikës F, që është pikë Riteri.

Ky ekuacion ka pamjen e mëposhtme: $\Sigma M_F(P)=0$

duke zëvendësuar mund të shkruhet : $R_A * 2a - P_1 * a + O_2 * h' = 0$

ku gjejmë: $O_2 = P_1 * a - 2R_A * a / h'$

Për të llogaritur vlerën e sforcimit D_1 të brinjës CF, duhet të shkruajmë ekuacionin e momenteve kundrejt pikës A, që është pikë Riteri. Ky ekuacion ka pamjen e mëposhtme:

$$\Sigma M_A(P)=0$$

duke zëvendësuar mund të shkruhet : $P_1 * a + D_1 * r = 0$

ku gjejmë: $D_1 = - P_1 * a / r$

Për të llogaritur vlerën e sforcimit V_4 , të brinjës GL, duhet të bëjmë prerjen II-II dhe studiojmë

ekuilibrin e anës së djathtë. Për brinjën GL, pra dhe për sforcimin V_4 , pike Riteri është mbështetja B.

Le të shkruajmë ekuacionin e momenteve kundrejt pikës B, si më poshtme:

$$\sum M_B(P) = 0$$

duke zëvendësuar mund të shkruhet: $V_4 * 2a - P_5 * a = 0$

$$\text{ku gjejmë: } V_4 = P_5 * a / 2a = P_5 / 2$$

Nëse rezultati i sforcimit është pozitiv, atëherë brinja do të punojë në tërheqje, nëse rezultati i sforcimit del negative, atëherë brinja do të punojë në shtypje.

5.8. Përcaktimi i sforcimeve në kapriatën me breza paralele

Gjatë studimit të kapriatës me breza paralele sic paraqitet në fig 5.8.1 vëmë re se për

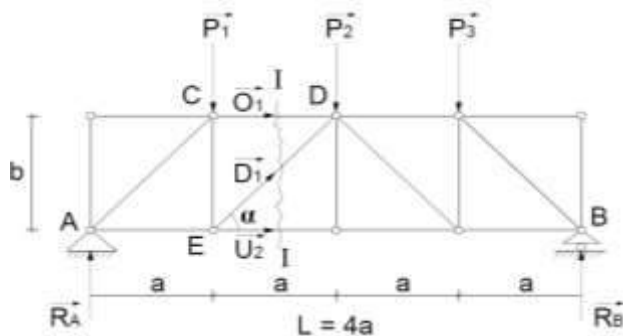


fig.5.8.1.

gjetjen e sforcimeve në diagonalet e saj nuk mund të përdorim metodën Riter, pasi dy brinjët e tjera të prera nga rrafshi imagjinar janë paralele, d.m.th nuk priten, kështu që nuk gjendet një pikë Riteri dhe nuk mund të shkruajmë ndonjë ekuacion të momenteve. Për të llogaritur vlerën e sforcimeve në brinjët paralele CD dhe FG, do të përdoret metoda Riter, kurse për të llogaritur vlerën e sforcimit D_2 , të brinjës FD, në fillim do të bëjmë prerjen me rrafsh imagjinar të të trija brinjëve (CD, FD, FG) dhe pastaj do ta shprehim ekuilibrin e pjesës së majtë të prerë me ekuacionin e projekcionit në boshtin vertikal për të gjitha forcat, shuma e të cilave duhet të jetë e barabartë me zero.

Pra: $\sum y = 0$

duke zëvendësuar mund të shkruhet: $R_A - P_1 + D_2 * \sin \alpha = 0$

$$\text{ku gjejmë: } D_2 = P_1 - R_A / \sin \alpha$$

Ku: α - këndi i formuar nga diagonalja ED me brezin e poshtëm të kapriatës.

5.9. Llogaritja e sforcimeve me mënyrën e veçimit të nyjës

Kjo gjë arrihet duke e ndarë nyjen nga pjesa tjetër e kapriatës dhe duke vendosur sforcimet përkatëse në brinjët e prera. Le të marrim në studim kapriatën në formë trekëndëshi fig 5.9.1.

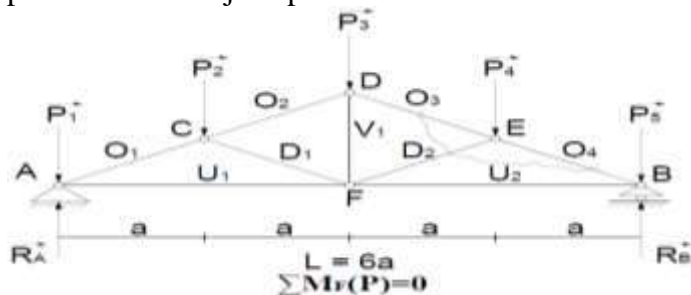


fig.5.9.1

Shohim se, për llogaritjen e sforcimeve në brinjët AC, EB, dhe DF të kapriatës, nuk mund të përdorim metodën Riter. Në këtë rast përdorimi mënyrën e veçimit të nyjës, e cila bazohet në prerjen imagjinare të nyjës ku bën pjesë brinja së cilës duam t'i caktojmë sforcimin. Për të llogaritur vlerën e sforcimit O_1 që lind në brinjën AC, duhet të veçojmë nyjën A, e cila ndodhet në ekuilibër nën veprimin e forcave konkurrenente rrafshje R_A , P_1 , O_1 , dhe U_1 , si në fig. 5.9.2

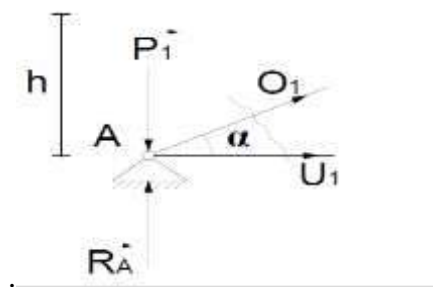


fig. 5.9.2

5.10. Llogaritja e sforcimeve për nyjën e veçuar.

Pikërisht për këto forca ne do të zbatojmë kushtet e ekuilibrit, gjë që arrihet nëpërmjet projeksonit të tyre në boshtin Y. Ekuacion ekuilibri është:

$$\Sigma Y=0$$

$$R_A - P_1 + O_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

Nga ku nxjerrim:

$$O_1 = (-R_A + P_1) / \sin \alpha$$

Për të llogaritur vlerën e sforcimit U_1 që lind në brinjën AF, duhet të zbatojmë kushtet e ekuilibrit të forcave nëpërmjet projeksonit të tyre në boshtin X. Ky ekuacion ekuilibri ka pamjen e mëposhtme:

$$\Sigma X=0$$

duke zëvendësuar mund të shkruhet: $U_1 + O_1 \cdot \cos \alpha = 0$

$$\text{ku gjejmë: } U_1 = -O_1 \cdot \cos \alpha$$

Pas zëvendësimit të O_1 në formulën e mësipërme del:

$$U_1 = -O_1 \cdot \cos \alpha = -(-R_A - P_1) \cdot \cos \alpha / \sin \alpha = (P_1 - R_A) \cdot \cot \alpha$$

Ose:

$$U_1 = -O_1 \cdot \cos \alpha = -(-R_A - P_1) \cdot \cos \alpha / \sin \alpha = (P_1 - R_A) / \tan \alpha$$

Për të llogaritur vlerën e sforcimit V_1 që lind në brinjën DF, duhet të veçojmë nyjën D, në të cilën veprojnë forcat P_3 dhe tri sforcimeve të panjohura, që janë: O_2 , O_3 , dhe V_1 , gjë që jepet në fig.5.10.1

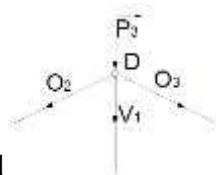


fig 5.10.1

Meqë në nyjën D kemi tri të panjohura dhe mund të shkruajmë vetëm dy ekuacione ekuilibri, atëherë gjejmë më parë vlerën e sforcimit O_2 në brinjën CD me metodën Riter.

Për të llogaritur vlerën e sforcimeve O_3 dhe V_1 , duhet të zbatojmë ekuacionet e mëposhtme të ekuilibrit në boshtin horizontal X dhe në atë vertikal Y:

$$\Sigma X=0 \text{ dhe } \Sigma Y=0$$

Ose:

$$\Sigma X = -O_2 \cdot \cos \alpha + O_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

Nga ku del:

$$-O_2 \cdot \cos \alpha = -O_3 \cdot \cos \alpha$$

Ose:

$$O_2 = O_3$$

Duke i projektuar forcat në boshtin vertikal Y, del:

$$\Sigma Y = (-V_1) + (-P_3) + (-O_2 \cdot \sin \alpha) + (-O_3 \cdot \sin \alpha) = 0$$

Ose:

$$V_1 = (-P_3) + (-O_2 \cdot \sin \alpha) + (-O_3 \cdot \sin \alpha)$$

Meqënëse $O_2 = O_3$, atëherë del:

$$V_1 = (-P_3) + 2(-O_2 \cdot \sin \alpha) = (-P_3) + 2(-O_3 \cdot \sin \alpha) = -P_3 - 2O_3 \cdot \sin \alpha = -P_3 - 2O_3 \cdot \sin \alpha$$

Për të llogaritur sforcimin O_4 , që lind në brinjën BE, siç e tregon fig 5.10.2

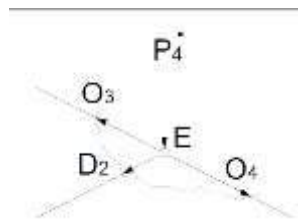


fig 5.10.2

do të veprojë njësoj si për llogaritjen e sforcimit O_1 , që lindi në brinjën AC.

Tema mësimore nr.6: Rezistenca e materialeve

6.1. Njohuri për shformimin dhe trupin elastik

Rezistenca e materialeve është ajo pjesë e mekanikës së ndërtimit që ka për detyrë të përcaktojë karakteristikat mekanike të materialeve të ndërtimit, si dhe të llogaris përmasat e elementeve të veçanta të konstruksionit, në mënyrë që t'u rezistojnë forcave të jashtme që veprojnë ndaj tyre.

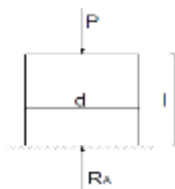


fig.6.1.1

Në statikë trupat merren absolutisht të ngurtë, të pashformueshëm. Pra, trupi nën veprimin e forcës P dhe kundërveprimit R_A , ndodhet në ekuilibër si në fig.6.1.1. Në rezistencën e materialeve merren parasysh cilësitë e vërteta që kanë materialet për ta ndryshuar formën, d.m.th. që trupi, nën veprimin e forcës P dhe të kundërveprimit R_A , do të ndryshojë formën dhe përmasat. Trupi do të shkurtohet me vlerën Δl , seksioni do të zgjerohet me vlerën Δd fig.6.1.2.

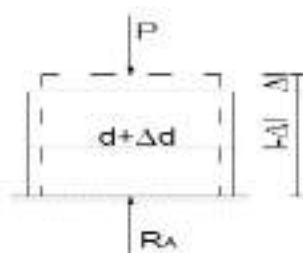


fig.6.1.2.

Trupi do të shkurtohet me vlerën Δl , seksioni do të zgjerohet me vlerën Δd fig.6.1.2. Në statikë kemi pranuar se efekti i një force nuk ndryshon, nëse pika e zbatimit të forcës zhvendoset gjatë vijës së saj të veprimit. Le të shohim efektin e dy forcave të barabarta P_1 dhe P_2 që veprojnë mbi një trup në pikat B dhe A siç ilustron në fig.6.1.3.

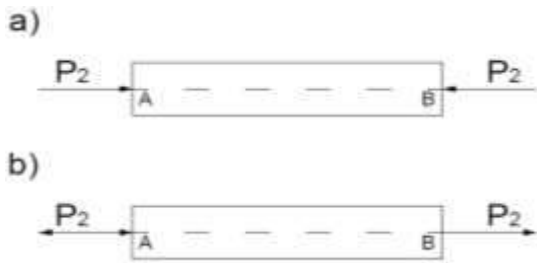


fig.6.1.3.

Në statikë në të dyja rastet e veprimin të forcave pavarësisht nga kahu, trupi ndodhet në ekuilibër. Përkundrazi, në rezistencën e materialeve këto dy raste janë krejt të ndryshme. Kështu, duke parë fig.6.1.3, në rastin e parë: a) *trupi punon në shtypje nën veprimin e forcave P_1 dhe P_2* , ndërsa në rastin e dytë b) *trupi punon në tërheqje*.

Studiojmë trarin AB, të mbështetur në të dyja anët në mur, mbi të cilin veprojnë forcat P_1 dhe P_2 mbi mbështetjet A dhe B si në fig. 6.1.4.

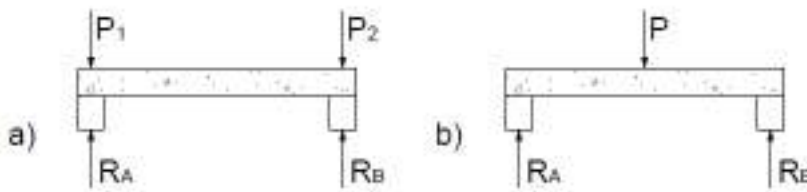


fig. 6.1.4

Në mbështetje lindin kundërveprimet $R_A = P_1$, dhe $R_B = P_2$. Në statikë forcat P_1 dhe P_2 , mund t'i zëvendësojmë me rezultanten e tyre R , ndërsa kundërveprimet mbeten të njëjta fig. 6.1.4 dhe në të dyja rastet trari është në ekuilibër. Në rezistencën e materialeve këto dy raste janë krejt të ndryshme. Në rastin e parë **a** trari pëson shformime lokale në sipërfaqet e mbështetjes, kurse në rastin e dytë **b**, kur forcat P_1 dhe P_2 zëvendësohen me rezultanten R , nën veprimin e saj trari pëson shformime në përkulje. Në rezistencën e materialeve do të pranojmë dy hipoteza të cilat nuk i përgjigjen realitetit, por që pranohen për thjeshtësi llogaritjeje. Hipotezat janë:

1. të gjithë trupat janë homogjene dhe izotropë;
2. të gjithë trupat janë krejtësisht të mbushur me material.

6.2. Metoda e prerjeve. Tensionet

Në rast se mbi një trup veprojnë forca të jashtme, trupi do ta ndryshojë gjendjen e mëparshme dhe do të shformohet. Po të ndërpritet veprimi i forcave të jashtme, shformimi i trupit do të zvogëlohet dhe trupi do të marrë formën e mëparshme. Kjo dukuri tregon se ndërmjet thërrmijave të veçanta të trupit veprojnë forca reciproke të brendshme ose forca elastike, të cilat kërkojnë ta kthejnë trupin në gjendjen e tij të mëparshme. Për studimin e forcave të brendshme të trupit që ndodhet në ekuilibër nën veprimin e forcave: P_1, P_2, P_3, P_4 , përdorim metodën e prerjes imagjinare fig. 6.2.1.

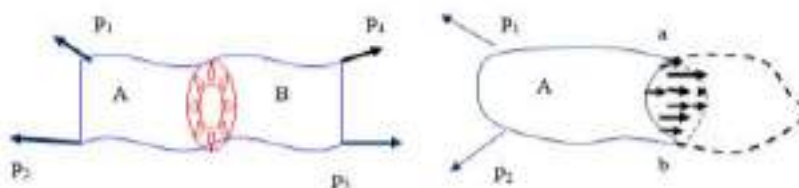


fig. 6.2.1

Çdo pjesë e trupit, nën veprimin e forcave të jashtme dhe të forcave të brendshme, që lindin, do të jetë në ekuilibër. Në rast se duam të përcaktojmë forcat e brendshme në *seksionin ab*, bëjmë

një prerje imagjinare në këtë seksion dhe e ndajmë trupin në dy pjesë A dhe B, duke hequr, p.sh., pjesën e djathtë B. Ndërkohë në pjesën e majtë A do të veprojnë forcat P_1 dhe P_2 . Që kjo pjesë të jetë në ekuilibër, në sipërfaqen e prerjes imagjinare duhet të vendosim forcat e brendshme. Këto forca përfaqësojnë veprimin e pjesës së djathtë B të hequr mbi pjesën e majtë A. Mënyra e shformimit që pëson trupi nga veprimi i forcave të jashtme, dikton dhe ligjin e shpërndarjes së forcave të brendshme në sipërfaqen e prerjes ose në një seksion të tij çfarëdo. Tensione quhen forcat e brendshme, që veprojnë në sipërfaqe elementare të prerjes tërthore të trupit. Njësia matëse është Pa (paskal) ose kPa (kilopaskal) dhe MPa (megapaskal).

Tension = forcë/sipërfaqe = $N/m^2 = Pa$; $1\text{ kPa} = 10^3\text{ Pa}$ dhe $1\text{ MPa} = 10^6\text{ Pa}$.

Sipas drejtimit të tensionit përkundrejt seksionit, dallojmë dy lloje kryesore tensionesh:

-tensione normale, drejtimi i tyre është pingul mbi seksionin tërthor të trupit dhe shënohet me σ (sigma). Këto tensione mund të jenë tensionet të tërheqjes ($+\sigma$) ose të shtypjes ($-\sigma$), si e tregon fig. 6.2.2 (a, b).

-tensione tangenciale, që shtrihen në rrafshin e seksionit dhe shënohen me τ (tau). Ato bëjnë që të dyja sipërfaqet të rrëshqasin kundrejt njëra tjetrës, prandaj dhe mund të quhen tensione të rrëshqitjes si në fig. 6.2.2.(c).

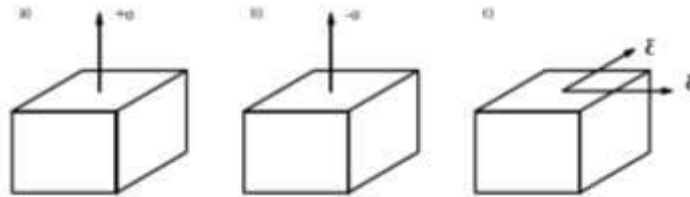


Fig.6.2.2

6.3. Elementet në rezistencën e materialeve

Në rezistencën e materialeve studiohen trupa që kanë gjatësi të madhe në krahasim me seksionin tërthor. Kur trupi punon në tërheqje ose në shtypje, ai quhet *shufër ose shtyllë*, ndërsa trupi që punon në përkulje, quhet *tra*. Mënyrat kryesore të veprimit të forcave të jashtme janë si në vijim: shufra punon në *tërheqje* ose në *shtypje* të thjeshtë, kur drejtimi i forcave të jashtme përputhet me aksin e shufrës, si në fig. 6.3.1. Këto forca quhen *forca aksiale*.

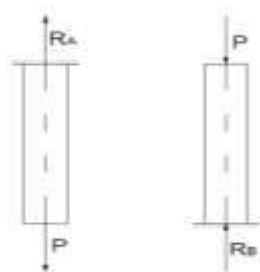


Fig. 6.3.1

Shufra punon në prerje (rrëshqitje). Këto forca përpiqen që ta rrëshqasin njëren pjesë të shufrës kundrejt tjetrës.

Në fig.6.3.2 paraqitet një tra i cili, nën veprimin e dy forcave P me kahe të kundërta, mund të pritë në seksionin ab.

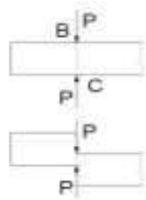


fig.6.3.2

Në trarët si në fig.6.3.3 punonë në përkulje plane, kur forcat e jashtme veprojnë pingul mbi aksin e traut.

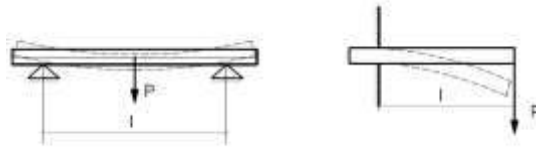


fig.6.3.3

6.4. Shformimet, ligji i Hukut

Një shufër prizmatike me seksion të pandryshueshëm dhe gjatësi l , zgjatet në drejtimin gjatësor nën veprimin e dy forcave tërheqëse aksiale P dhe ngushtohet në drejtimin tërthor, siç tregohet

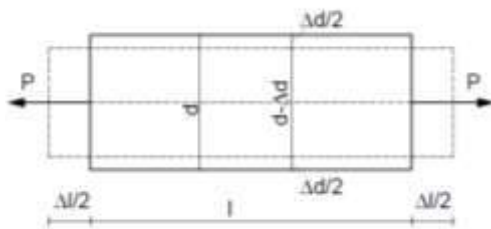


fig.6.4.1.

në fig.6.4.1. Zgjatimi që pëson shufra në drejtimin gjatësor, quhet *zgjatim absolut* Δl . Në rast se forca aksiale P vepron në shtypje, shufra do të shkurtohet në drejtimin gjatësor dhe do të zgjerohet në drejtimin tërthor, gjë që paraqitet në fig 6.4.2.

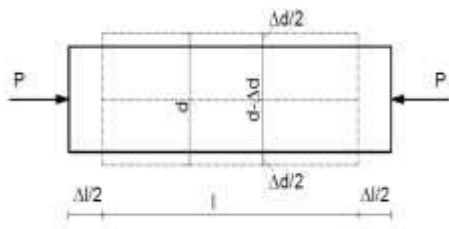


fig. 6.4.2

Shkurtimi që pëson shufra, quhet *shkurtim absolut* Δl . Njësia e matjes është centimetri ose milimetri . Vlera e shformimit gjatësor varet nga gjatësia e shufrës l . Gjithashtu, shformimi i shufrës varet edhe nga:

- vlera e ngarkesës që vepron në të;
- nga përmasat e prerjes tërthore;
- nga vetitë elastike të materialit.

Për të shprehur shformimin e shufrës, por të pavarur nga gjatësia l , përdorim konceptin e *zgjatimit ose shkurtimit relativ*, d.m.th. vlerën e zgjatimit ose të shkurtimit për njësi të gjatësisë së shufrës, që e shënojmë me simbolin ϵ është numër pa njësi $\epsilon = \Delta l / l$

Nga provat në tërheqje ose shtypje të materialeve të ndryshme, vëmë re se shformimi gjatësor

Δl ndryshon në përpjestim të drejtë me vlerën e forces P. Kjo do të thotë që, sa herë zmadhohet forca P, aq herë zmadhohet dhe shformimi gjatësor Δl .

Raporti nëpërmjet shformimeve dhe forcës për herë të parë është përcaktuar nga shkencëtari Robert Huk dhe quhet ligji i Hukut.

Në rast se në vend të forcës marrim tensionet normale $\sigma = P/F$ dhe në vend të shformimit absolut Δl marrim shformimin relative gjatësor $\epsilon = \Delta l/l$, atëherë ligji i Hukut mund të shkruhet në formën:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Pra, tensionet janë në përpjestim të drejtë me shformimet. Koeficienti E quhet moduli i elasticitetit gjatësor. Moduli elasticitetit karakterizon qëndrueshmërinë e materialit ndaj shformimeve elastike në tërheqje ose në shtypje. Vlera e modulit të elasticitetit E karakterizon vetitë elastike të materialit dhe përcaktohet me metoda eksperimentale.

Meqënëse ϵ është madhësi pa njësi, atëherë njësia matëse e modulit të elasticitetit E do të jetë e njëjtë me njësinë e matjes së tensioneve, Pa, MPa.

Tensionet normale shprehen me formulat e mëposhtme: $\sigma = P/F$ dhe $\sigma = E \cdot \epsilon$

Prej nga del: $P/F = E \cdot (\Delta l/l) \rightarrow \Delta l = P \cdot l / E \cdot F$

Produkti $E \cdot F$ quhet shtangësi në shtypje ose në tërheqje.

Zgjatimi ose shkurtimi absolut Δl është në përpjestim të drejtë me forcën P dhe gjatësinë fillestare l, si dhe në përpjestim të zhdrejtë me shtangësinë $E \cdot F$ të shufrës.

6.5. Tensionet në tërheqje dhe në shtypje

Eksperimentet e kryera mbi kampione shufrash të drejta me seksion konstant fig.6.5.1, tregojnë se në tërheqje aksiale të gjitha fibrat e shufrës zgjaten në mënyrë të barabartë.



fig.6.5.1

Kjo mund të ndodhë vetëm atëherë, kur në të gjitha fibrat veprojnë forca të barabarta elasticiteti, ndryshe, forcave të mëdha do t'u përgjigjeshin shformime të mëdha. Një përfundim i tillë vlen jo vetëm për fibrat në sipërfaqe të shufrës, por dhe për fibrat në brendësi të saj. Rezultantja N e të gjitha forcave të brendshme do të jetë e barabartë me produktin e tensioneve normale σ me sipërfaqen F të seksionit tërthor:

$$N = \sigma \cdot F$$

Zbatojmë kushtin e ekuilibrit statik të forcave :

$$\sum X = -P + N = 0;$$

$$-P + \sigma \cdot F = 0$$

$$\text{Prej nga del: } \sigma = P/F$$

Kjo formulë përdoret për caktimin e tensioneve normale σ , kur njihet forca P në tërheqje ose në shtypje, si dhe sipërfaqja F e seksionit tërthor

6.6. Tensionet e lejuara. Llogaritjet e qëndrueshmërisë.

Konstruksionet që përgatiten duhet të kenë qëndrueshmëri dhe jetëgjatësi, dhe kjo arrihet kur tensionet maksimale, që lindin për shkak të veprimit të forcave të jashtme, nuk kalojnë një kufi të caktuar sigurimi dhe kur shformimet janë elastike.

Tensionet maksimale me të cilat njehsohen konstruksionet, quhen tensione të lejuara. Vlera e tensioneve normale të lejuara $[\sigma]$ për materialet elastike është një pjesë e tensioneve të rjedhshmërisë σ_r . Pra : $[\sigma] = \sigma_r / k_1$

Për materialet e thyeshme vlera e tensioneve normale të lejuara $[\sigma]$ është një pjesë e tensioneve të qëndrueshmërisë σ_q . Pra : $[\sigma] = \sigma_q / k_2$

Ku: k_1 dhe k_2 quhen koeficientë të sigurisë.

Në vlerën e koeficienteve të sigurisë ndikojnë shumë faktorë, më kryesorët janë:

- *mungesa e homogjenit të materialit;*
- *mungesa e përpikmërisë për përcaktimin e ngarkesave;*
- *hapsirat që mund të bëhen për shkak të thjeshtimit të llogaritjeve;*
- *afati i shfrytëzimit të veprës etj.*

Në përcaktimin e tensioneve normale të lejuara $[\sigma]$ duhet pasur parasysh që ato të mos i kalojnë tensionet që janë në kufi të elasticitetit. Kur në konstruksione veprojnë ngarkesa dinamike atëherë koeficienti i sigurisë rritet. Koeficienti i sigurisë është numri që tregon se sa herë duhen zvogëluar tensionet kufitare.

Në studimin e qëndrueshmërisë së materialit kemi tri lloje problemesh:

- 1) *Kontrolli i qëndrueshmërisë së shufrave.* Në këtë rast njihen: forca P , sipërfaqja e seksionit tërthor F dhe vlera e tensioneve të lejuara $[\sigma]$ për materialin e dhënë. Kërkohej të llogaritet tensionet normale σ ?
Nëse tensionet normale $\sigma = P/F < [\sigma]$, atëherë shufra plotëson kushtin e qëndrueshmërisë, në të kundërt, ajo nuk e plotëson atë.
- 2) *Gjetja e sipërfaqes së seksionit tërthor.* Në këtë rast njihen: forca aksiale P dhe tensionet e lejuara $[\sigma]$. Kërkohej të llogaritet sipërfaqja F e seksionit tërthor.
 $F = P/[\sigma]$. Kjo formulë përcakton sipërfaqen e seksionit tërthor të shufrave që punojnë në tërheqje, në shtypje.
- 3) *Përcaktimi i ngarkesës së lejuar $[P]$.* Kjo ngarkesë përcaktohet nga formula $\sigma = P/F = < [\sigma]$, prej së cilës del: $[P] = F \cdot [\sigma]$. Pra, për të llogaritur ngarkesën e lejuar $[P]$, duhet të njihen tensionet e lejuara $[\sigma]$ dhe sipërfaqja F e seksionit tërthor.

Tema mësimore nr.7: Përkulja e trarëve të drejtë

7.1. Ngarkesat

Do të studiohet përkulja e një trari të drejtë, e shkaktuar nga veprimi i forcave të jashtme, të cilat veprojnë sipas rrafshit të simetrisë dhe pingul me boshtin e tij gjatësor. Trari, nga veprimet e forcave, do të përkulet sipas rrafshit të veprimit të tyre. Kjo lloj përkuljeje quhet *përkulje rrafshe*, kurse trupi që punon në përkulje, quhet *tra* fig. 7.1.1.

Rrafshi simetrisë

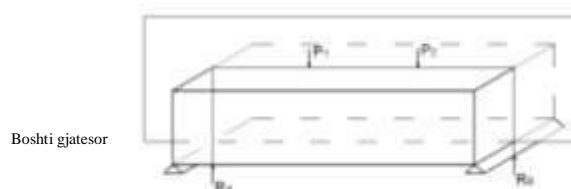


fig. 7.1.1

Shformimi i trarit nga përkulja, por gjithmonë në kufijtë e elasticitetit, është aq i vogël, saqë, praktikisht, ndikimi i tyre në gjatësinë fillestare të trarit mund të mos merret parasysh, kurse kundërveprimet në mbështetje do të përcaktohen sipas rregullave të statikës së trupit të ngurtë. Megjithatë ngarkesat e jashtme të zbatuara në një tra, shkaktojnë ndryshime të formës së saj gjeometrike, që lidhen me zhvendosjen e pikave, të vijave dhe të rrafsheve që ka vetë trari. Zhvendosjet përgjatë vijave të drejta quhen *zhvendosje lineare*, zhvendosjet e lidhura me rrotullimin e vijave dhe të rrafsheve (seksioneve), quhen *zhvendosje këndore*. Në fig. 7.1.2

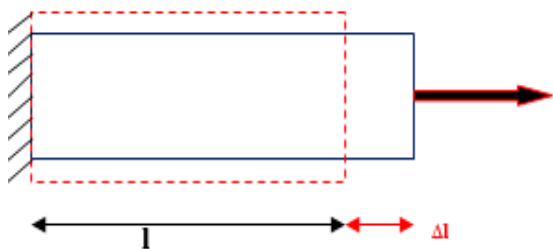
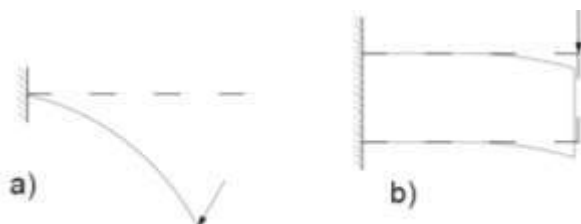


fig. 7.1.2

me vija të plota është treguar një tra ne gjendje të shformuar, për shkak te veprimit të ngarkesave të llojeve të ndryshme, të zbatuara në skajin e lirë të tij. Këtu, zhvendosjen lineare Δl e ka marrë gjatë tërheqjes.

7.2. Ngarkesa të përqendruara dhe të shpërndara

Zhvendosjet më të mëdha i pësojnë trupat e përkulshëm, p.sh. trarët e hollë fig. 7.2.1.a, kurse zhvendosjet më të vogla i pësojnë dhe trupat masivë, dhe të ngurtë fig. 7.2.2.b.



7.2.1.a

7.2.2.b

Në rezistencën materiale, trupi është pranuar të jetë krejtësisht elastik, në qoftë se pas heqjes së ngarkesave të jashtme ai kthehet plotësisht në formën e tij fillestare gjeometrike, dhe pjesërisht elastik, nëse forma e tij gjeometrike nuk rikthehet plotësisht në gjendjen fillestare. Zhvendosja dhe shformimi ndahen në *zhvendosje dhe në shformim elastik* dhe në *zhvendosje dhe në shformim mbetës*, pra që mbeten në trup pas heqjes së ngarkesave. Ngarkesat që veprojnë në tra, ndahen në *ngarkesa të përqendruara dhe në ngarkesa të shpërndara*. Në të vërtetë nuk ka ngarkesa të përqendruara në një pikë, pasi të gjitha ngarkesat transmetohen nëpërmjet sipërfaqes. Ngarkesa që shpërndahet në një sipërfaqe të vogël të trarit, për thjeshtësi llogaritjeje merret e përqendruar në një pikë. Mbështetja e trarit sekundar mbi trarin kryesor merret si ngarkesë e përqendruar.

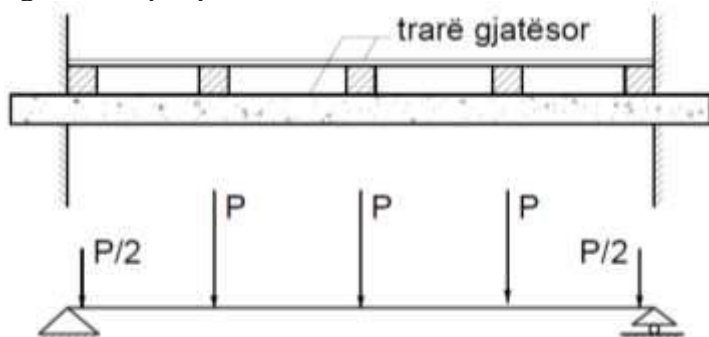


fig. 7.2.3.

Në fig. 7.2.3 jepet trari gjatësor AB, i cili e merr ngarkesën nga trarët tërthorë të vendosur mbi të. Një transmetim i tillë i ngarkesës merret gjithashtu si ngarkesë e përqendruar. Ngarkesa e shpërndarë shprehet në N / m^2 ose në kN / m^2 . Në praktikë më shpesh takohet ngarkesa shpërndarë uniforme si: pesha vetjake e ndërkateve, e trarëve, ngarkesa e dëborës. Gjatë llogaritjes së trarëve është më e përshtatshme të përdoren ngarkesa që veprojnë në njësinë e gjatësisë së trarit njësi matëse në N/m ose në kN/m .

7.3. Momenti i përkuljes dhe forca prerëse

Le të studiojmë trarin AB, një tra i ngulur në mur në njërin skaj dhe të lirë në skajin tjetër. Në skajin e lirë të trarit vepron ngarkesa e përqendruar P, e cila ndodhet në rrafshin e simetrisë së tij, si në fig.7.3.1.

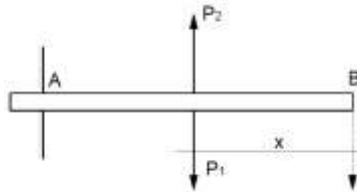


fig.7.3.1

Le të zbatojmë dy forca në një seksion me largësi x nga ana e lirë e trarit, e pikërisht forcën P₁ dhe forcën P₂, të cilat janë me madhësi të barabarta, por me kahe të kundërta. Duke qenë se forcat P₁ dhe P₂ ekuilibrojnë njera - tjetrën, rrjedh se edhe ekuilibri i trupit nuk do të prishet. Forcat P dhe P₂ formojnë një çift forcash, duke krijuar kështu një moment M_x të barabartë me: $M_x = -P \cdot x$, i cili përpriqet ta përkulë trarin në formë të mysët (shenja -), siç e tregon qartë edhe Në fig. 7.3.2. Ky moment quhet *momenti i përkuljes*.

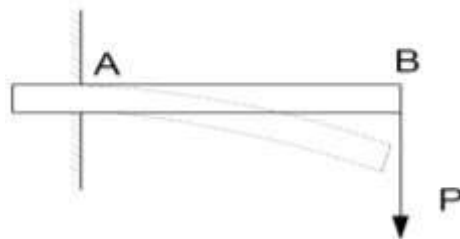


Fig.7.3.2

Forca P₁, e cila është me vlerë të barabartë dhe kah të njëjtë me forcën P, përpriqet ta presë trarin në këtë seksion. Pikërisht këtë forcë ne do ta quajmë *forcë prerëse* dhe do ta shënojmë me Q_x. Pra: $Q_x = P_1 = P$

Nëse jemi në rastin kur mbi tra veprojnë disa ngarkesa, si në fig.7.3.3

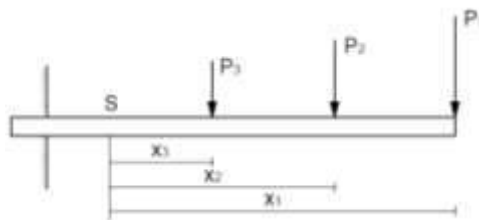


fig.7.3.3

atëherë momenti i përkuljes M_x dhe forca prerëse Q_x në një seksion çfarëdo S do të jenë:

$$M_x = - P_1 \cdot X_1 - P_2 \cdot X_2 - P_3 \cdot X_3$$

$$Q_x = P_1 + P_2 + P_3$$

Ekuacionet e mësipërme kanë dalë nga kushtet e ekuilibrit të trarit nga seksioni S deri në skajin e lirë, në të cilin është zbatuar forca P₁. Kushtet e ekuilibrit janë.

$$\Sigma M_s(P) = 0 \text{ dhe } \Sigma_y P = 0$$

Si konkluzion rregull i përgjithshëm i përcaktimit të madhësisë së momentit përkulës është:

Momenti përkulës në një seksion tërthor çfarëdo të trarit, është numerikisht i barabartë me shumën algjebrike të momenteve së të gjitha forcave të jashtme, që ndodhen nga njëra anë e

seksionit, kundrejt qendrës së rëndesës së seksionit.

Forca prerëse në një seksion tërthor çfarëdo të trarit, është numerikisht e barabartë me shumën algjebrike të projeksioneve në aksin Y së të gjitha forcave të jashtme të zbatuara në një rënë anë të seksionit.

7.4. Marveshje

a) Forcën prerëse do ta marrim me shenjë pozitive, nëse, duke e parë nga e majta, është drejtuar lart, dhe duke e parë nga e djathta, është drejtuar poshtë si në fig.7.4.1, kurse në rast të kundërt, forcën prerëse do ta marrim me shenjë negative.

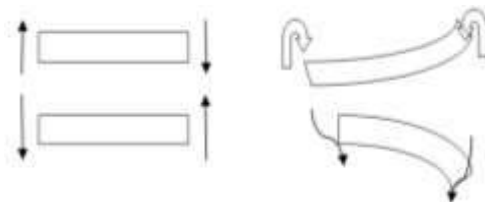


Fig.7.4.1

b) Momentin përkulës do ta marrim me shenjë pozitive, në qoftë se, nga veprimi i forcave të jashtme, tërhiqen fibrat e poshtme; në rast të kundërt atë do ta marrim me shenjë negative, gjë që tregohet në seksionin më sipër.

Pra, shenja e momentit përkulës M dhe e forcës prerëse është e lidhur me karakterin e shformimit të trarit. Për efekt të momentit të përkuljes në seksionin tërthor të trarit lindin tensionet normale të përkuljes σ , kurse për efekt të forcës prerëse lindin tensionet tangenciale τ .

7.5. Diagrami i forcave prerëse

Ndërtimi i diagramit të forcave prerëse Q bëhet sipas hapave:

1. Përcaktojmë se sa do të jetë forca prerëse në një seksion çfarëdo me largësi x nga skaji i lirë B i trarit. Nga ekuacioni i ekuilibrit të forcave kundrejt boshtit vertikal Y gjejmë:

$$Q_x = + P$$
 Forcat prerëse në të gjithë gjatësinë e trarit janë: $Q_x = \text{konst.}$
2. Heqim një vijë paralel me boshtin e trarit, që ndryshe quhet vija e zerove e forcave prerëse.
3. Zgjedhim një shkallë çfarëdo për vlerën e forcave prerëse.
4. Pjesëtojmë vlerën e forcës prerëse $Q_x = P$ me shkallën e zgjedhur dhe e vendosim këtë vlerë të dalë sipër vijës së zerove
5. Duke i bashkuar me një vijë të drejtë dhe paralele me vijën e zerove vlerat në A dhe në B, do të përftojme diagramin e forcave prerëse Q .

Vëmë re se forca prerëse në çdo seksion të trarit ka një vlerë të pandryshueshme $Q = \text{konst.} = P$ dhe diagrami i saj ka formën e një drejtkëndëshi.

Ndërtimi i diagramit forcave prerëse Q si në fig.7.5.1.



fig.7.5.1.

7.6. Diagrami i momenteve përkulëse

Ndërtimi i diagramit të momentit përkulës bëhet sipas hapave:

1. Në një seksion çfarëdo dhe me largësi x nga skaji i lirë B i trarit, duke shikuar nga ana e djathtë e seksionit, momenti i përkuljes do të jetë: $M_x = -P \cdot x$

Ku: Vlera e x - it shkon në kufijtë 0 deri në l . Për $x = 0$, momenti përkulës do të jetë:

$M_x = P \cdot 0 = 0$ dhe për $x = l$, momenti përkulës do të jetë: $M_x = P \cdot l$

2. Heqim një vijë paralel me boshtin e trarit, që ndryshe quhet *vija e zerove të momenteve përkulëse*.

3. Zgjedhim një shkallë çfarëdo për vlerat e momenteve përkulëse

4. Pjesëtojmë vlerën e momentit m_A ($P \cdot l$) me shkallën e zgjedhur dhe e vendosim këtë vlerë në fund të vijës së zerove (që i përket inkastrimit A).

5. Bashkojmë me vijë të drejtë vlerën e momentit për $x = 0$ dhe vlerën e momentit m_A , sipas shkallës së caktuar. Në këtë mënyrë ne kemi përfunduar diagramin e momenteve përkulëse. Ndërtimi i diagramit të momentit përkulës si në fig.7.6.1.

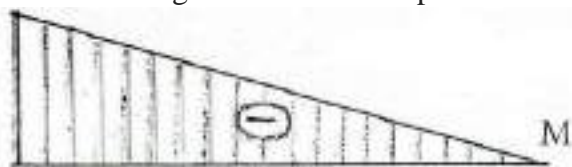


fig.7.6.1

Diagrami i forcave prerëse Q dhe i momenteve të përkuljes M për trarin e thjeshtë me një hapësirë janë të ndryshme në varësi të ngarkimit të trarëve të thjeshtë me ngarkesa të përqëndruara simetrike dhe josimetrike.

Raste më të shpeshta janë:

- a- trari i thjeshtë i ngarkuar josimetrikisht me një ngarkesë të përqëndruar;
- b- trari i thjeshtë i ngarkuar simetrikisht me një ngarkesë të përqëndruar;
- c- trari i thjeshtë i ngarkuar simetrikisht me dy ngarkesa të përqëndruara;
- d- trari i thjeshtë i ngarkuar josimetrikisht me dy ngarkesa të përqëndruara.

7.7. Trari i thjeshtë i ngarkuar josimetrikisht me një ngarkesë të përqëndruar

Duke qënë se trari në fig.7.7.1. është ngarkuar me një ngarkesë të përqëndruar josimetrike P në pikën C, kuptohet që kjo ngarkesë do të shkaktojë edhe një përkulje të trarit sipas një kurbe josimetrike. Në mbështetjet e trarit do të kemi vetëm reaksionet vertikale R_A dhe R_B . Vëmë re se nga e majta e këtij seksioni vepron vetëm një forcë, që është kundërveprimi i mbështetjes A (R_A).

Nga ekuacioni i ekuilibrit në boshtin Y kemi : $\Sigma P_Y = 0$

Del rrjedhimisht: $Q_X = R_A = P \cdot b/l$

Meqënëse kundërveprimi mbështetjes R_A është i drejtuar lart, atëherë forca prerëse në pjesën e parë është pozitive, kurse diagrami i forcave prerëse Q do të ketë pamjen e një drejtkëndëshi të vendosur mbi boshtin e abshisave OO_1 .

Le të shqyrtojmë pjesën e dytë të trarit nga mbështetja B deri në seksionin me largësi X_1 nga mbështetja B. Vëmë re se nga e djathta e këtij seksioni vepron vetëm një forcë, që është kundërveprimi mbështetjes B (R_B), kurse nga e majta veprojnë dy forca: kundërveprimi R_A dhe

forca P, kështu që për të caktuar forcën prerëse Q_{x1} , është më e lehtë që të shikojmë nga ana e djathtë e seksionit. Kështu duke pasur parasysh rregullën e shenjave për forcat prerëse Q. Nga ekuacioni i ekuilibrit në boshtin Y kemi : $\Sigma P_Y = 0$

$$\text{Del rrjedhimisht: } Q_{x1} = -R_B = -P \cdot a/l$$

Meqënëse kundërveprimi i mbështetjes R_B është i drejtuar lart, atëherë forca prerëse në pjesën e dytë do të jetë negative, kurse diagrami forcave prerëse Q do të ketë pamjen e një drejtkëndëshi, por të vendosur poshtë bushtit të abshisave OO_1 . Pamja përfundimtare e diagramit të forcave prerëse Q karakterizohet me një thyrje, ku vlera e kësaj thyrjeje është e barabartë me këtë ngarkesë P.

Nëse në një tra veprojnë disa ngarkesa, atëherë diagrami i forcave prerëse do të ketë thyrje nën çdo ngarkesë, ku vlera e çdo thyrjeje do të jetë sa ngarkesa përkatëse.

Le të shohim tani se si do të ndërtohet diagrami i momenteve përkulëse M. Për një seksion të çfarëdoshëm në largësi x nga mbështetja A, pa, për pjesën e parë të trarit, momenti përkulës M është më lehtë të përcaktohet për forcat që ndodhen nga e majta e këtij seksioni, Nëse zbatojmë kushtin e ekuilibrit për këtë pjesë, do të kemi:

$$\Sigma M_x(P) = 0$$

Ose

$$-M_x + R_A \cdot X = 0$$

ku gjejmë:

$$M_x = R_A \cdot X$$

Meqë trari bën përkulje të lugët (tërhiqen fibrat e poshtme), atëherë momenti përkulës (sipas marrëveshjes) do të jetë me shenjë pozitive.

Shprehja e mësipërme e momentit përkulës paraqet një ekuacion të shkallës së parë, pra paraqet ekuacionin e një vijëdrejte. Për ndërtimin e saj mjafton të gjenden dy pika

karakteristike, që janë: $x = 0$ dhe $x = l$

Për $x = 0$ do të kemi:

$$M_A = R_A \cdot 0 \rightarrow M_A = 0$$

Për $x = a$ do të kemi

$$M_C = R_A \cdot a \rightarrow M_C = (P \cdot b/l) \cdot a \rightarrow M_C = P \cdot a \cdot b/l$$

Vendosim në shkallën e caktuar më parë dhe poshtë boshtit të abshisave, por në drejtim të ngarkesës P, ordinatën $M_C = P \cdot a \cdot b/l$. Bashkojmë fundin C_1 të kësaj ordinate me pikën O na formohet segmenti C_1O , duke ndërtuar diagramin e momenteve përkulëse për pjesën e parë.

Për të caktuar momentin përkulës në seksionin me largësi x_1 nga mbështetja B e trarit, pra, të pjesës së dytë të trarit, duhet të marrim në shqyrtim vetëm momentin e forcës së vetme R_B , që ndodhet nga e djathta e seksionit.

Nëse zbatojmë kushtin e ekuilibrit për këtë pjesë, do të kemi:

$$\Sigma M_{x1}(P) = 0$$

Ose:

$$M_{x1} + (-R_B \cdot X_1) = 0$$

Nga ku gjejmë:

$$M_{x1} = R_B \cdot X_1$$

Meqë trari bën përkulje të lugët, duke shikuar nga e djathta e seksionit, atëherë ky moment përkulës do të jetë me shenjë pozitive. Shprehja e mësipërme e momentit përkulës paraqet një ekuacion të shkallës së parë, pra na paraqet ekuacionin e një vijëdrejte. Për ndërtimin e saj mjafton të gjenden dy pika karakteristike, që janë: $X_1 = 0$ dhe $X_1 = b$.

Për $x_1 = 0$ do të kemi:

$$M_B = R_B \cdot 0 \rightarrow M_B = 0$$

Për $x = b$ do të kemi:

$$M_C = R_B \cdot b \rightarrow M_C = (P \cdot a/l) \cdot b \rightarrow M_C = P \cdot a \cdot b/l$$

Nga formula e mësipërme doli se $a = b = l/2$, momenti përkulës në pikën C do të llogaritet me formulën e mëposhtme:

$$M_C = [P \cdot (l/2) \cdot (l/2)]/l \rightarrow M_C = P \cdot l/4$$

Për ndërtimin e diagramit të momenteve përkulëse për pjesën e dytë, do të veprojmë njëllëj si për ndërtimin e diagrameve të pjesës së parë. Në këtë mënyrë ne përfundimisht diagramin e plotë të momenteve përkulëse.

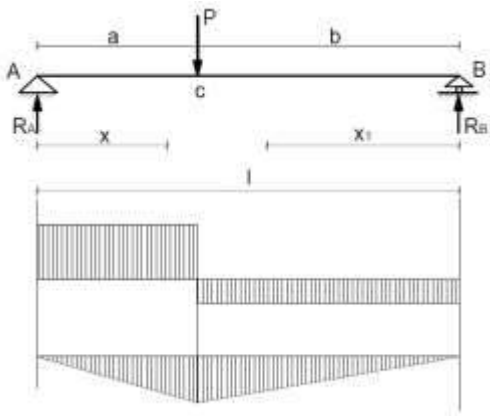


fig.7.7.1.

7.8. Trari i thjeshtë i ngarkuar simetrikisht me një ngarkesë të përqëndruar (shembull numerik)

Trari është ngarkuar me një ngarkesë të përqëndruar simetrike P në pikën C, kuptohet që kjo ngarkesë do të shkaktojë një përkulje të trarit sipas një kurbe simetrike. Gjithashtu në mbështetjet e trarit do të kemi reaksionet vertikale R_A dhe R_B , që janë të barabarta me njëra tjetrën.

Ndërtojmë diagramin e forcave prerëse Q për fig.7.8.1 e dhënë

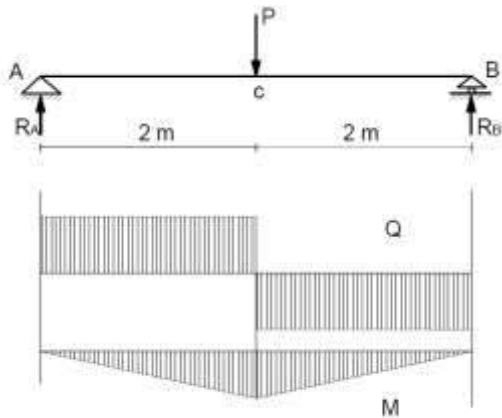


fig.7.8.1

Llogarisim vlerat e forcave prerëse duke analizuar forcat majtas:

$$Q_A = R_A = 1000\text{N dhe } Q_C^m = R_A = 1000\text{N}$$

$$Q_C^d = R_A - P = -1000\text{N}$$

$$Q_B = R_A - P = -1000\text{N}$$

Analizojmë forcat djathtas, do të kemi:

$$Q_C^d = -R_B = -1000\text{N dhe } Q_B = -R_B = -1000\text{N}$$

Poshtë skemës së trarit vizatojmë boshtin e abshisave për diagramin e forcave prerëse, i cili duhet të jetë paralel me boshtin e trarit, dhe aty projektojmë skajet e trarit A dhe B, si dhe pikën C ku vepron ngarkesa P.

Në projektionet e pikës C dhe B vendosim vertikalisht poshtë bushtit të abshisave segmentet që paraqesin vlerat e forcave prerëse $Q_C^d = Q_B = -R_B = -1000\text{N}$, por me gjatësi të segmentit sa $1000:1000=1\text{cm}$.

Bashkojmë me vijë të drejtë skajet e dy segmenteve të vendosura në B dhe në C, do të na formohet një drejtkëndësh me brinjën horizontale 2 cm (që i përgjigjet në realitet gjatësisë $CB = l/2 = 4\text{ m}/2 = 2\text{ m}$) dhe me lartësinë 1 cm (sa $R_B = 1000\text{N}$).

Vëmë re se në pikën C diagrami i forcave prerëse ka një thyerje prej 2 cm, që në shkallën e

forcave paraqet forcën e përqëndruar $P=200N$.
Ndërtojmë diagramin e momenteve përkulëse M .

Llogarisim duke analizuar majtas, vlerën e momenteve përkulëse në seksionet karakteristike të trarit, që janë: A, C dhe B. Meqë trari bën përkulje të lugët, këto momente përkulëse do të jenë pozitive:

$$M_A = R_A * 0 = 1000N * 0 = 0 \text{ N*m}$$

$$M_C = R_A * 1/2 = P/2 * 1/2 + P * 1/4 = 2000 \text{ N*m}$$

$$M_B = R_A * 1 - P * 1/2 = 1000 * 4 - 2000 * 4/2 = 4000 - 4000 = 0 \text{ N*m}$$

Nëse jemi duke analizuar djathtas, do të kemi:

$$M_B = R_B * 0 = 1000N * 0 = 0 \text{ N*m}$$

7.9. Trari i thjeshtë i ngarkuar simetrikisht me dy ngarkesa të barabarta të përqëndruara

Trari është ngarkuar me dy ngarkesa të barabarta të përqëndruara dhe simetrike P në pikën C dhe D, të cilat veprojnë në të njëjtin kah, këto ngarkesa do të shkaktojnë edhe një përkulje të trarit sipas një figure simetrike. Gjithashtu, në mbështetjet e trarit do të kemi vetëm reaksionet e tyre R_A dhe R_B , të cilat do të jenë të barabarta me njëra – tjetrën.

Shembuj ilustrimi: Të ndërtohet diagrami i forcës prerëse Q dhe momentit përkulës M për trarin e thjeshtë të mbështetur lirisht i ngarkuar simetrikisht me dy ngarkesa të barabarta të përqëndruara sin ë fig 7.9.1.

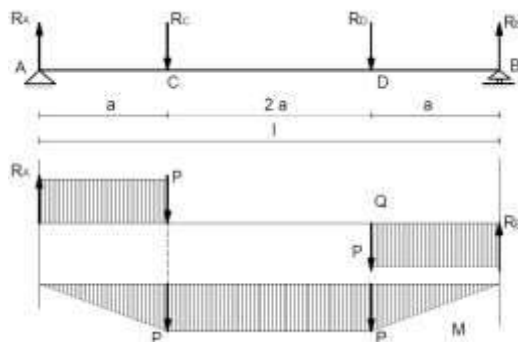


fig.7.9.1

Trari është ngarkuar me dy ngarkesa të barabarta të përqëndruara dhe simetrike P në pikën C dhe D, të cilat veprojnë në të njëjtin kah, këto ngarkesa do të shkaktojnë edhe një përkulje të trarit sipas një figure simetrike. Në mbështetjet e trarit do të kemi reaksionet R_A dhe R_B , të cilat do të jenë të barabarta me njëra - tjetrën. $R_A = R_B = \sum P/2 = 2P/2 = P$

➤ Ndërtojmë diagramin e forcave prerëse Q .

- Llogarisim forcën prerëse në të gjitha seksionet e pjesës së parë, pra, nga mbështetja A deri tek seksioni C, e cila është e pandryshueshme dhe e barabartë me: $Q_{AC} = R_A = P$

- Në të gjitha seksionet e pjesës së dytë, pra, duke filluar nga seksioni C deri tek seksioni D, forca prerëse është zero: $Q_{CD} = R_A - P = P - P = 0$

- Në të gjitha seksionet e pjesës së tretë, pra, duke filluar nga seksioni D deri në mbështetjen D, forca prerëse nuk do të ndryshojë dhe do të jetë e barabartë me: $Q_{BD} = -R_B = -P$

Duke i vendosur (sipas një shkalle të caktuar më parë) në boshtin e abshisave vlerat e gjetura të Q_{AC} , të Q_{CD} dhe të Q_{BD} , do të përftojme diagramin e forcave prerëse Q .

➤ Ndërtojmë diagramin e momenteve përkulëse M

- Momenti përkulës në seksionin e mbështetjes A është zero: $M_A = R_A * 0 = 0$

- Momenti përkulës në seksionin C është: $M_C = +R_A * a = +P * a$

- Momenti përkulës në seksionin D përcaktohet duke shikuar nga ana e djathtë e seksionit, sepse në atë pjesë vepron vetëm një forcë (kundërveprimi R_B): $M_D = -R_B * a = -P * a$

- Momenti përkulës në mbështetjen B është: $M_B = R_B \cdot 0 = 0$

7.10. Trari i thjeshtë i ngarkuar josimetrikisht me dy ngarkesa të përqëndruara (shembull numerik)

Trari është ngarkuar me dy ngarkesa jo të barabarta të përqëndruara dhe josimetrike P_1 , dhe P_2 (ku $P_1 \neq P_2$) përkatësisht në pikën C dhe D, të cilat veprojnë në të njëjtin kah, këto ngarkesa do të shkaktojnë edhe një përkulje të trarit sipas një figure josimetrike. Në mbështetjet e trarit do të kemi vetëm reaksionet e tyre R_A dhe R_B .

Caktojmë shkallën e gjatësisë: $1\text{cm}=1\text{ m}$. Sipas kësaj shkalle, trarin do ta vizatojmë me gjatësi të barabartë me: $5:1=5\text{ cm}$.

Caktojmë shkallën e forcës (dhe të forcave prerëse): $1\text{ cm}=2\text{kN}$. Me këtë shkallë ngarkesat $P_1=2\text{ kN}$ dhe $P_2=4\text{kN}$ do t'i vizatojmë përkatësisht me gjatësi $2:2=1\text{ cm}$ dhe $4:2=2\text{ cm}$.

Caktojmë shkallën e momenteve përkulëse: $1\text{ cm}=3\text{kN}\cdot\text{m}$

Plotësojmë skemën e trarit me kundërveprimet R_A dhe R_B përkatësisht në mbështetjet A dhe B. Duke i bashkuar fundet e këtyre ordinatave, do të përftojmë diagramin përfundimtar të momenteve përkulëse M , i cili do të ketë formën e një trapezi të çfarëdoshëm. E mbushim këtë trapez me vija vertikale dhe shënojmë shenjën (+). Vëmë re se vlera maksimale e momentit përkulës $M_D = 6\text{ kN}\cdot\text{m}$, përkon me atë seksion ku forca prerëse pret boshtin e abshisave dhe ndërron shenjën.

Gjejmë kundërveprimin R_A , shkruajmë ekuacionin e ekuilibrit: $\Sigma M_B(P)=0$

Ose: $\Sigma M_B(P) = R_A \cdot (1.5 + 1.5 + 2) + (-P_1)(1.5 + 2) + (-P_2) \cdot 2 = 0$

Prej nga del: $R_A = P_1 \cdot 3.5 + P_2 \cdot 2/5 = 2 \cdot 3.5 + 4 \cdot 2/5 = 15/5 = 3\text{ kN}$

$$\mathbf{R_A = 3\text{ kN}}$$

Gjejmë kundërveprimin R_B , shkruajmë ekuacionin e ekuilibrit: $\Sigma M_A(P)=0$

Ose: $\Sigma M_A(P) = -R_B(2 + 1.5 + 1.5) + P_2 \cdot (1.5 + 1.5) + P_1 \cdot 1.5 = 0$

Prej nga del: $R_B = P_1 \cdot 1.5 + P_2 \cdot 3/5 = 2 \cdot 1.5 + 4 \cdot 3/5 = 15/3 = 3\text{kN}$

$$\mathbf{R_B = 3\text{ kN}}$$

Bëjmë kontrollin e kundërveprimeve, duke përdorur për këtë qëllim ekuacionin të ekuilibrit:

$$\Sigma Y(P) = 0$$

$$\Sigma Y(P) = R_A + (-P_1) + (-P_2) + R_B = 0$$

Duke zëvendësuar vlerat do të kemi:

$$\Sigma Y(P) = 3 + (-2) + (-4) + 3 = +6 + (-6) = 0$$

➤ *Ndërtojmë diagramin e forcave prerëse Q.*

Gjejmë vlerat e forcave prerëse duke analizuar majtas, pra:

$$Q_{AC} = R_A = 3\text{ kN};$$

$$Q_{CD} = R_A - P_1 = 3 - 2 = 1\text{ kN};$$

$$Q_{BD} = R_A - P_1 - P_2 = 3 - 2 - 4 = -3\text{ kN}$$

Nëse shohim djathtas, do të kemi: $Q_{DB} = -R_B = 3\text{ kN}$

Në seksionet AC, CD dhe DB vendosim në shkallën e zgjedhur ordinatat e gjetura të Q_{AC} , të Q_{CD} dhe të Q_{DB} , që si gjatësi janë përkatësisht 1.5 cm , 0.5 cm dhe 1.5 cm . Duke ve ndosur vlerat në shkallë të caktuar përfitojmë diagramin e forcave prerëse Q si në fig.7.10.1.

➤ *Ndërtojmë diagramin e momentit përkulëse M.*

Gjejmë vlerat e momenteve përkulëse duke analizuar majtas:

$$M_A = R_A \cdot 0$$

$$M_C = R_A \cdot 1.5 = 3 \cdot 1.5 = 4.5\text{kNm}$$

$$M_D = R_A \cdot 3 - P_1 \cdot 1.5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1.5 = 6\text{ kNm}$$

Analizuar majtas: $M_D = R_B \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6\text{ kNm}$

$$M_B = R_B \cdot 0 = 0\text{ kNm}$$

Vlerat për seksionet karakteristike M_A , M_B , M_C , M_D i vendosim sipas shkallës së caktuar më sipër të momentit përkulëse $1\text{ cm}=3\text{kN}\cdot\text{m}$ si më poshtë:

$$M_A=0 \text{ cm}$$

$$M_B=0 \text{ cm}$$

$$M_C=4,5:3=1.5 \text{ cm}$$

$$M_D= 6: 3=2 \text{ cm}$$

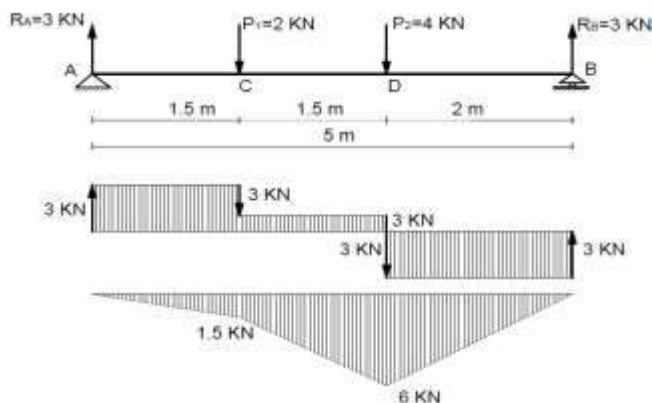


fig.7.10.1.

7.11. Trari i thjeshtë i ngarkuar me ngarkesa të njëtrajtshme

Në këta trarëve të thjeshtë me ngarkesa të njëtrajtshme, dallojmë këto raste:

- Trari i ngarkuar me ngarkesë të njëtrajtshme dhe i inkastruar në njërin skaj e i lirë në skajin tjetër (ancak);
- Trari i thjeshtë i ngarkuar me ngarkesë të njëtrajtshme i mbështetur lirisht në të dyja anët.

Për këta trarë themi:

- Forca prerëse në një seksion të trarit është e barabartë me shumën algjebrike të forcave të jashtme që veprojnë në njërin anë të seksionit.
- Forca prerëse është pozitive, nëse, duke parë nga e majta, është e drejtuar lart, dhe duke parë nga e djathta, është e drejtuar poshtë; në të kundërt është negative.
- Momenti përkulës në një seksion të trarit është i barabartë me shumën algjebrike të momenteve të forcave të jashtme që veprojnë në njërin anë të seksionit, por kundrejt qendrës së rëndesës të këtij seksioni.
- Kur në një seksion tërhiqen fibrat e poshtme të trarit, momenti përkulës në të është pozitiv, kur tërhiqen fibrat e sipërme ai është negativ.
- Forca prerëse ndërmjet dy forcave të përqendruara është konstante dhe paraqitet grafikisht nga një vijë e drejtë, e cila është paralele me boshtin e trarit (në raste të veçanta është zero). Kur ngarkesa është e shpërndarë njëtrajtësisht në të gjithë gjatësinë e trarit, forca prerëse ka vlera të ndryshme dhe paraqitet grafikisht nga një vijë e pjerrët.
- Momenti përkulës ndërmjet dy forcave të përqendruara ka vlera të ndryshme dhe paraqitet grafikisht nga një vijë e drejtë e pjerrët. Kur ngarkesa është e shpërndarë njëtrajtësisht në të gjithë gjatësinë e trarit, momenti përkulës paraqitet nga një vijë e lakuar (parabolë).
- Momenti përkulës maksimal pozitiv ndodhet aty ku forca prerëse (sipas diagramit të saj) bëhet zero ose ndërron shenjë nga pozitive në negative.

Tema mësimore nr.8 : Trarët e vazhduar

8.1. Shkalla e pacaktshmërisë statike

Tra i vazhduar quhet trari që mbulon dy a më shumë hapësira, gjë që ilustrohet në fig.8.1.1 Hapësirë quhet largëesia ndërmjet dy mbështetjeve të trarit.

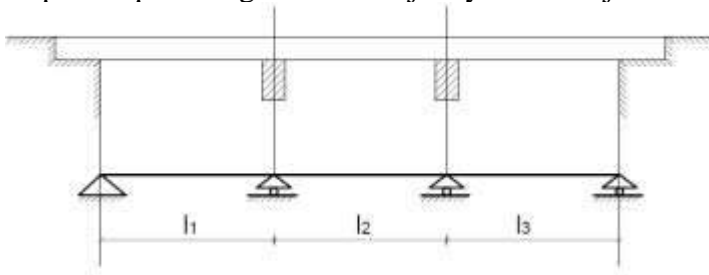


fig.8.1.1

Në skemën e fig.8.1.2 paraqitet një tra me dy hapsira i ngarkuar me një ngarkesë të përqëndruar simetrikisht në çdo hapsirë

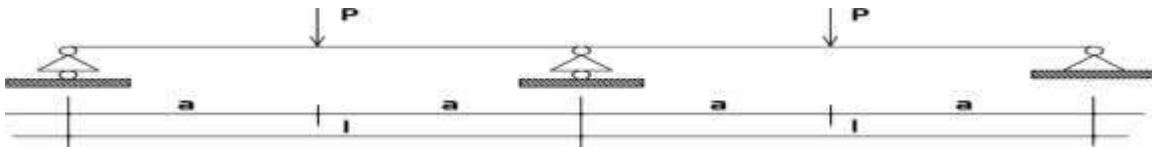


fig.8.1.2

Një tra i vazhduar është element konstruktiv statikisht i pacaktuar. Quhet statikisht i pacaktuar, po qe se ekuacionet statike të ekuilibrit janë të pamjaftueshme për të përcaktuar forcat e brendshme dhe reaksionet që lindin në të. Pra do të kemi pacaktueshmëri statike nëse numri i të panjohurave n_p që duam të llogarisim është më i madh se numri i ekuacioneve n_e pra kur: $n_p > n_e$.

Përkulja më e madhe gjatë ngarkimit të hapsitave të trarit të vazhduar ndodh në mesin e çdo hapsire. Në këtë rast, fibrat e mëposhtme do të punojnë në terheqje, kurse në mbështetjet do të ndodhë tërheqja e fibrave të sipërme.

Trarët e vazhduar kanë disa anë pozitive si: janë ekonomike, përdoren gjërësisht në objektet industriale e bujqësore, në veprat e ndryshme inxhinjerie etj.

Trarët e vazhduar që kanë gjetur përdorim më të madh, janë ata të përgatitur prej betoni të armuar, meqë ky material është i përshtatshëm për ndërtimin e konstruksioneve monolite.

Për të penguar zhvendosjen horizontale të një trari të vazhduar, duhet që një nga mbështetjet e tij të bëhet e palëvizshme.

Meqenëse në të gjitha rastet e trarëve të vazhduar ngarkesat janë vertikale, kundërveprimet horizontale janë zero, kështu që për çdo tra mund të shkruhen vetëm dy ekuacione të ekuilibrit. Shkalla e pacaktueshmërisë statike të trarit të vazhduar do të jetë e barabartë me numrin e mbështetjeve minus dy.

Në qoftë se shënojmë shkallën e pacaktueshmërisë statike me S , kurse numrin e mbështetjeve me m , atëherë do të kemi: $S = m - 2$

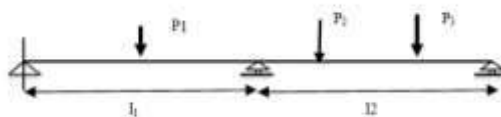


fig.8.1.3.

Në fig.8.1.3 është paraqitur një tra i vazhduar me dy hapësira, si edhe me tri mbështetje $m = 3$, prandaj shkalla e pacaktueshmërisë së saj statike do të jetë: $S = m - 2 = 3 - 2 = 1$

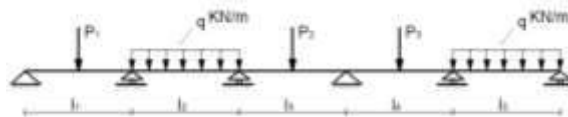


fig.8.1.4.

Në fig.8.1.4. është paraqitur një tra i vazhduar me pesë hapsira dhe me gjashtë mbështetje $m=6$, prandaj shkalla e pacaktueshmërisë statike do të jetë:

$$S = m - 2 = 6 - 2 = 4$$

8.2. Ekuacioni i tre momenteve

Le të marrim në studim trarin e vazhduar me katër hapësira, që tregohet në fig.8.2.1.

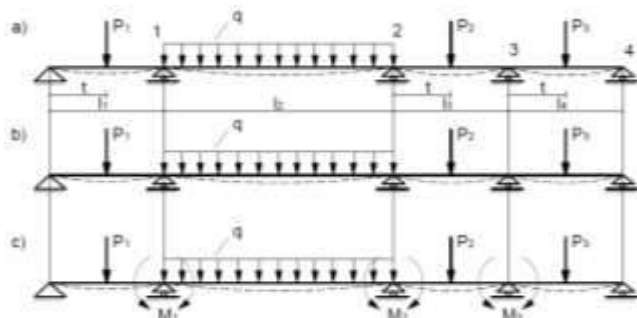


fig.8.2.1

Le ta presim atë në mbështetjet e mesit, të cilat janë mbështetjet: 1, 2, 3.

Duke vepruar në këtë mënyrë, do të përftojme trarë të thjeshtë me dy mbështetje dhe të caktuar statikisht, që i përkasin seksionit **b**. Secili tra i thjeshtë përkulet nën veprimin e ngarkesave në mënyrë të pavarur nga të tjerët. Pas përkuljes, dy seksionet tërthore mbi çdo mbështetje ndërmjetëse do t'i mendojmë se formojnë ndërmjet tyre një kënd rrotullimi, të cilin e kemi shënuar me simbolin ϕ , si në fig. fig.8.2.2.(a,b)

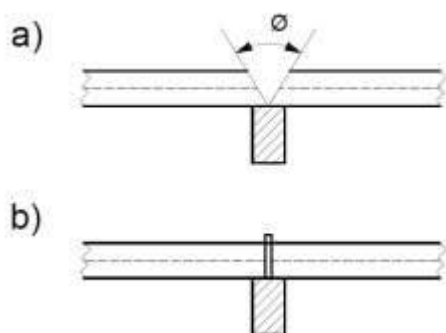


fig.8.2.2.(a,b)

Në të dyja seksionet e marra shumë pranë njëri-tjetrit nga ndarja e trarit në trarë të thjeshtë, nuk formohet asnjë kënd rrotullimi ndërmjet tyre. Nga ndarja e menduar e trarit të vazhduar në trarë të thjeshtë dhe statikisht të caktuar, gjithashtu mendohet se në çdo mbështetje të prerë zbatohen çifte momentesh të brendshme, siç tregohet në seksionin c) të fig. 8.2.1. të cilat duke vepruar së bashku me ngarkesat e jashtme, e pengojnë formimin e këndeve të rrotullimit. Këto momente të brendshme të përkuljes që sigurojnë vazhdueshmërinë e trarit në mbështetjet ndërmjetëse, duhet të vendosen në mbështetjet, që kanë përkatësisht numrat: 1, 2, 3, pasi ato zëvendësojnë veprimin e secilit tra të prerë kundrejt njëri-tjetrit.

8.3. Trarët e vazhduar statistikisht të pacaktuar

Në trarët e thjeshtë statikisht të caktuar dhe që kanë dy mbështetje, veprojnë ngarkesat e dhëna dhe momentet e panjohura të shënuara me M_1, M_2, M_3 , të cilat i marrim si pozitive.

Që që sistemi i trarëve të thjeshtë e statikisht të caktuar të jete i njëjtë me gjendjen e vërtetë të trarit të vazhduar, duhet që shuma e këndeve ϕ të lindura në çdo mbështetje ndërmjetëse prej

ngarkesave të dhëna dhe prej momenteve në mbështetje, të jetë e barabartë me zero. Kendi ϕ , i formuar nga dy seksione shumë të afërta të çdo mbështetjeje, ndikohet nga ato momente dhe ngarkesa, të cilat përkulin dy hapësirat e anashkaluara. Kështu, këndi i mospërputhjes së seksioneve në mbështetjen 2 varet nga momenti M_1 që vepron nga ana e djathtë e mbështetjes 1, nga momentet M_2 dhe nga momenti M_3 , që vepron nga ana e majtë e mbështetjes 3, si dhe prej ngarkesave reale në fushën e dytë dhe të tretë të trarit. Pra për çfarëdo shkalle të pacaktueshmërisë statike, secili nga ekuacionet e një mbështetjeje përmban ekuacionet e tri momenieve prandaj quhen *ekuacionet e tri momenteve*. Duke pasur parasysh fig. 8.3.1, themi se ekuacioni i tri momenteve për trarin e vazhduar për një mbështetje ndërmjetëse n , jepet pa vërtetim dhe ka këtë trajtë:

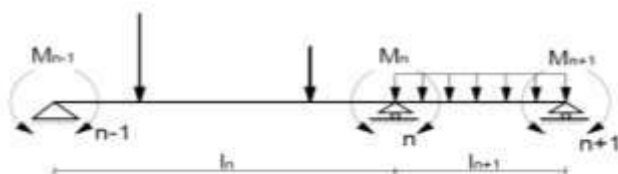


fig.8.3.1

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2 \cdot M_n \cdot (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \cdot R_n^0$$

Ku: $-R_n^0$ - kundërveprimi imagjinar në mbështetjen n , që lind nën veprimin e ngarkesave të vërteta që vepron në hapsirat l_n dhe l_{n+1} .

Ekuacioni i mësipërm i tri momenteve është i vlefshëm për trarë të vazhduar që e kanë seksion tërthor të pandryshueshëm në të gjithë gjatësinë.

Për mbështetjen 1 do të kemi: $2 \cdot M_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \cdot R_1^0$

$$Ku: R_1^0 = \frac{P_1 \cdot l_1^2}{16} + \frac{q \cdot l_2^2}{24}$$

Për mbështetjen 2 do të kemi: $M_1 \cdot l_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6 \cdot R_2^0$

$$Ku: R_2^0 = \frac{q \cdot l_2^3}{24} + \frac{P_2 \cdot l_3^2}{16}$$

Për mbështetjen 3: $M_2 \cdot l_3 + 2 \cdot M_3 \cdot (l_3 + l_4) + M_4 \cdot l_4 = -6 \cdot R_3^0$

$$Ku: R_3^0 = \frac{P_2 \cdot l_3^2}{16} + \frac{P_3 \cdot l_4^2}{16}$$

8.4. Shembuj numerik

Të gjenden momentet në mbështetje dhe të ndërtohet diagram e momenteve të përkuljes, si dhe e forcave prerëse për trarin e vazhduar me dy hapësira, si në fig. 8.4.1.

Në hapsirën e parë(0-1) është ngarkuar me një ngarkesë simetrikisht të përqëndruar $P_1=2$ kN. Kuse hapsira e dytë është ngarkuar (1-2) me dy ngarkesa simetrike, që janë të barabarta dhe të përqëndruara: $P_2=P_3=1.6$ kN.

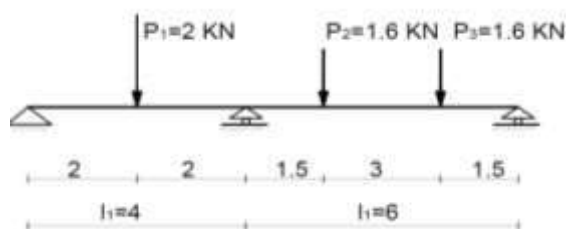


fig. 8.4.1

Për ta zgjidhur ndjekim këtë rrugë:

- a- Gjejmë shkallën e pacaktueshmërisë statike të trarit të vazhduar me anë të formulës:

$$S = m - 2 \quad (\text{ku } m - \text{është numëri i mbështetjes së trarit } m=3) \quad S = 3 - 2 = 1.$$

- b- Shkuajmë ekuacionin e tre momenteve për mbështetjen e dytë me numrin 1

$$2 * M * (l_1 + l_2) = -6 * R_1^0$$

Gjejmë kundërveprimin R_1^0 në tabelat e gatshme dhe kemi :

$$R_1^0 = \frac{P_1 * l_1^2}{16} + \frac{P_2 * a * (l_2 - a)}{2} = \frac{2 * 4^2}{16} + \frac{1.6 * 1.5 * (6 - 1.5)}{2} = 2 + 5.4 = 7.4 \text{ kN*m}^2$$

Duke i zëvendësuar vlerat e gjetura numerike në ekuacionin e mëspërm të tri momenteve do të kemi; $2 * M * (4 + 6) = -6 * 7.4$

$$M = \frac{-6 * 7.4}{20} = -2.22 \text{ kN*m} \quad (\text{shenja minus në këtë rast, tregon se momenti përkulë në mbështetjen e dytë i tërheq fibrat e spërme të traut)}$$

Ndajmë trautin e vazhduar fig. 8.4.1, në dy trarë të thjeshtë si në fig. 8.4.2.

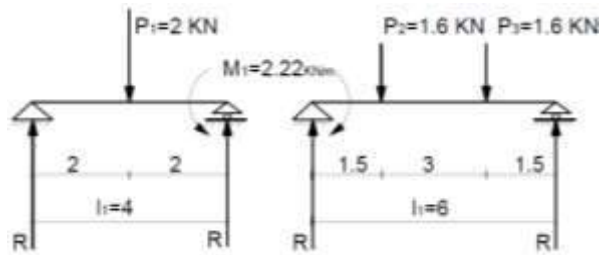


fig. 8.4.2.

➤ *Llogaritja e kundërveprimit në mbështetje*

Llogarisim kundërveprimin e mbështetjes së dytë të fig. 8.4.1 ekuacioni i ekuilibrit shkruhet si më poshtë: $\Sigma M_1(P) = 0$ ose

$$R_0 * l_1 + (-P_1 * l_1 / 2) + [-(-M_1)] = R_0 * 4 + (-2 * 4 / 2) + [-(-2.22)] = R_0 * 4 - 4 + 2.22 = R_0 * 4 - 1.78 = 0$$

Ku del: $R_0 = 1.78 / 4 = 0.445 \text{ kN}$

Llogarisim kundërveprimin në mbështetjen e parë (në 0) dhe shkruajmë ekuacionin e ekuilibrit si më poshtë: $\Sigma M_0(P) = 0$ ose

$$R^m_1 * l_1 + P_1 * l_1 / 2 + [-(-M_1)] = R^m_1 * 4 + 2 * 4 / 2 + [-(-2.22)] = R^m_1 * 4 + 6.22 = 0$$

Ku del: $R^m_1 = 6.22 / 4 = 1.555 \text{ kN}$

Llogarisim kundërveprimin në mbështetje për hapsirën e dytë. Duke përdorur ekuacionin e ekuilibrit si më poshtë: $\Sigma M_2(P) = 0$ ose

$$+(-P_2)(l_2 - 1.5) + (-P_2)(l_2 - 3 - 1.5) + M_1 = R_1^d * 6 + (-1.6)(6 - 1.5) + (-1.6)(6 - 3 - 1.5) + (-2.22) = R_1^d * 6 - 1.6 * 4.5 - 1.6 * 1.5 - 2.22 = R_1^d * 6 - 11.82 = 0$$

Ku del se $R_1^d = 11.82 / 6 = 1.97 \text{ kN}$

Llogarisim kundërveprimin në mbështetje për hapsirën e tretë. Duke përdorur ekuacionin e ekuilibrit si më poshtë: $\Sigma M_1(P) = 0$ ose

$$- R_2 * l_2 + P_2 * (l_2 - 1.5) + P_2 * (l_2 - 3 - 1.5) + M_1 = R_2 * 6 + 1.6(6 - 1.5) + 1.6(6 - 3 - 1.5) + (-2.22) = 0$$

$$R_2 = 7.38 / 6 = 1.23 \text{ kN.}$$

➤ *Llogaritja e momentit përkulës*

Llogaritja e vlerës së momentit përkulës në hapsirën e parë sipas ekuacionit të ekuilibrit.

$$\Sigma M_0(P) = 0$$

Ose $M_a = R_0 * 2 = 0.445 * 2 = 0.89 \text{ kNm}$

Ose $M_1 = R_0 * 4 - P_1 * 2 = 0.445 * 4 - 2 * 2 = -2.22 \text{ kNm}$

Pra $M_0=0$

Gjejmë vlerën e momentit përkulës në hapsirën e dytë sipas ekuacionit të ekuilibrit,

$$\Sigma M_2(P)=0$$

$$M_c=R_2*1.5=1.23*1.5=1.845\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_b=R_2*4.5-P_2*3=1.23*4.5-1.6*3=0.735\text{ kNm}$$

Pra $M_1= -2.22\text{ kNm}$

Pra $M_2= 0$

➤ *Llogaritja e forcave prerëse*

Llogaritja e forces prerëse për hapsirën e parë: $Q_{0-a}=R_0= 0.445\text{ kN}$; $Q_{a-1}= -R_1^m= -1.555\text{ kN}$

Llogaritja e forces prerëse për hapsirën e dytë: $Q_{2-c}= -R_2= -1.23\text{ kN}$;

$Q_{c-b}= -R_2+P_2= -1.23+1.6=0.37\text{ kN}$; $Q_{b-1}= R_1^d= 1.97\text{ kN}$

Me vlerat ndërtohet diagrama e momentit përkuljes dhe e forcës prerëse për trarin e vazhduar me dy hapësira, si në fig.8.4.3.

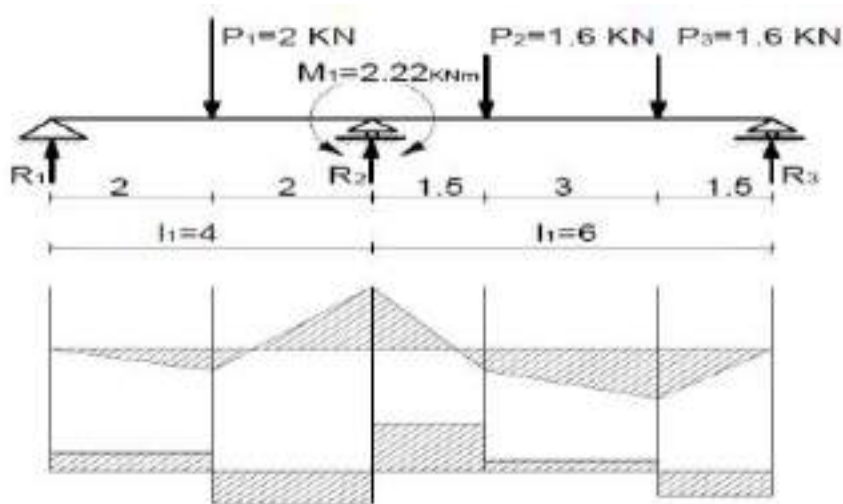


fig.8.4.3

Tema mësimore nr.9: Përkulja gjatësore

9.1. Qëndrueshmëria në epje dhe ngarkesa kritike

Shufrat që ngarkohen sipas boshtit të tyre në shtypje, *quhen shtylla*. Shtyllat mund të shkatërrohen më shpejt për shkak të perkuljes anësore shumë të madhe, sesa për shkak të ngarkesës shtypëse. Këtu bëhet fjalë për shtylla me përmasa të seksionit tërthor shumë herë më të vogla se gjatësitë e tyre, pra bëhet fjale për shtylla relativisht të gjata dhe të holla, të cilat për një madhësi të caktuar të forcës shtypëse boshtore, do të pësojnë *perkulje gjatësore*.

Në jetën e përditshme vërejmë se elementë të ndryshme në formë shufrash ose shtyllash, nën veprimin e forcave të jashtme, e ndërrojnë formën nën tensione më të vogla se ato të lejuarat. Për ta shpjeguar këtë fenomen, do të marrim në studim një shufër të hollë dhe të gjatë çeliku me seksion tërthor të pandryshueshëm në të gjithë gjatësinë e saj (pra me moment inercie I dhe me ngurtësi $E\cdot I$ të pandryshueshme) të cilën e vendosim në pozicion vertikal dhe e ngulim (inkastrojmë) skajin e poshtëm, kurse skajit të tij të sipërm të lirë i vendosim një ngarkesë me një vlerë të caktuar, por që vepron sipas boshtit të shufrës, e cila tregohet në fig.9.1.1.

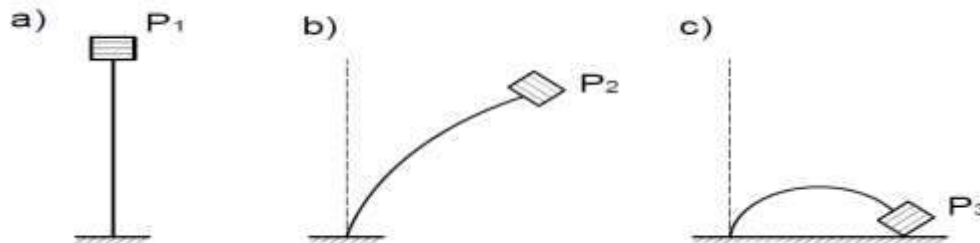


fig.9.1.1

9.2. Shufra në shtypje

Duke qënë nën veprimin e kësaj ngarkese, shufra do të shtypet, por boshti saj do të qendrojë i drejtë. Nëse momentet kryesore të inercisë së seksionit tërthor të shufrës do të ishin të ndryshme, atëherë ajo mund të përkulet në rrafshin që ka ngurtësinë më të vogël. Nëse mbi shufrën ushtrojmë një forcë horizontale H , ajo do të dalë nga pozicioni vertikal dhe do të përkulet pak. Pas largimit të forcës horizontale, forcat e brendëshme (forcat e elasticitetit) do ta kthejnë shufrën në pozicionin fillestar dhe kjo gjë do të ndodhë derisa ngarkesa shtypëse, duke u rritur, do të arrijë një vlerë kufitare P_1 . Në fazën e parë të përkuljes gjatësore shufra e drejtë prej çeliku ndodhet në një ekuilibër të qëndrueshëm elastik dhe në figurë ky moment tregohet në seksionin a). Nëse do të zmadhojmë ngarkesën deri në një vlerë P_2 , e cila e kalon shumë pak vlerën kufitare P_1 , shufra do të pesojë një lakesë të vogël, si në seksionin b) të figurës. Kjo ngarkesë do ta shtypë dhe do ta përkulë atë. Në këtë fazë të përkuljes gjatësore shufra e perkulur do të jetë në ekuilibër, pasi forcat e brendshme të elasticitetit në përkulje do ta ekuilibrojnë momentin e jashtëm të përkuljes, por ky ekuilibër do të jetë i paqëndrueshëm. Nëse e zmadhojmë akoma më shumë ngarkesën, pra $P_3 > P_2$, atëherë forcat e brendëshme nuk do të mund ta ekuilibrojnë ngarkesën e jashtme dhe, për këtë arsye shufra do të përkulet dhe do të humbasë qëndrueshmërinë, por edhe mund të thyhet, gjë që varet nga lloji i materialit prej së cilit është prodhuar vetë shufra, nga gjatësia e shufrës, nga forma e seksionit tërthor të shufrës, nga mënyra e mbërthimit të skajeve të shufrës në mbështetjet. *Kjo përkulje mund të ndodhë nën veprimin e një ngarkese P_k më të vogël se ngarkesa e nevojshme në shtypje për përkuljen e saj.*

9.3. Llogaritja e përmasave për ruajtjen e qëndrueshmërisë

Në një kapriatë, ka shufra që punojnë në shtypje, atëherë përmasat e tyre duhet të llogariten të tilla që ngarkesa e punës që veprojnë mbi to të mos e kalojnë ngarkesën kritike. Mosplotësimi i këtij kushti do të çonte në humbjen e qëndrueshmërisë së këtyre shufrave dhe mund të sillte shkatërrimin e të gjitha kapriatës.

Ngarkesa kufitare nën të cilën shufra kalon nga pozicioni i ekuilibrit të qëndrueshmërisë në atë të paqëndrueshëm, quhet ngarkesë kritike P_k .

Ngarkesa kritike duhet të shikohet si ngarkesa e tyre shkatërruese.

Shufrat që punojnë në shtypje duhet të llogariten në mënyrë të tillë që të përjashtohet rreziku i lindjes së përkuljes gjatësore, gjë që do të thotë që madhësia e lejuar e forcave shtypëse duhet

të jetë më e vogël se ngarkesa kritike. Tensionet që lindin në shufër nën veprimin e ngarkesës kritike, janë shumë më të vogla se ato të solidaritetit. Kur ngarkesat që veprojnë mbi një shufër nuk i shkaktojnë humbjen e qëndrueshmërisë, atëherë themi se ajo do të quhet e qëndrueshme. Për llogaritjen e ngarkesës së lejuar shtypëse P_{lej} të shtyllave përdoret formula e mëposhtme.

$$P_{lej} = \frac{P_k}{n}$$

Ku: P_k - ngarkesa kritike;

n - quhet rezerva e qëndrueshmërisë ose koeficienti i sigurisë në epje.

Përkulja gjatësore ndodh në shufrat që e kanë prerjen tërthore shumë më të vogël në krahasim me gjatësinë e tyre.

Vlera e ngarkesës kritike varet nga:

a) lloji i materialit të shufrës;

b) përmasat e prerjes tërthore;

c) nga gjatësia faktike;

d) mënyra e kapjes së mbërthimit të shufrës në skajet e saj.

Vlera e ngarkesës kritike llogaritet me formulën e Eulerit:

$$P_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2}$$

Ku: E - moduli i elasticitetit gjatësor që ka materiali;

I_{min} – momenti kryesor qendror më i vogël i inercisë;

l - gjatësia faktike e shufrës;

μl gjatësia e reduktuar e shufrës;

μ - koeficient i reduktimit të gjatësisë, i cili varet nga mënyra e kapjes së shufrës në skajet e saj, vlera e tij jepet në fig. 9.3.1.

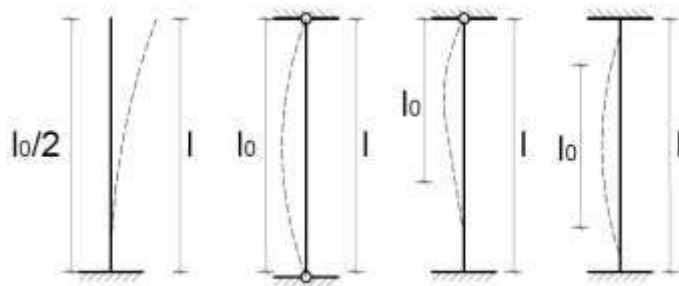


fig. 9.3.1.

9.4 Momenti i inercisë

Llogaritja bëhet me formulën $\mu = l_0/l$. Ku gjatësia l_0 është gjatësia e reduktuar. Sipas fig.9.3.1 shihet rastet:

- Kur dy skajet e shufrës janë të mbërthyera me çernjera atëherë $\mu = 1$
- Kur njëri skaj i shufrës është i mbërthyera ngurtësisht dhe skaji tjetër është i lirë atëherë $\mu = 2$
- Kur dy skajet e shufrës janë të mbërthyera ngurtësisht atëherë $\mu = 1$
- Kur njëri skaj i shufrës është i mbërthyer ngurtësisht dhe skaji tjetër është me çernjera atëherë $\mu = 0.7$

Formula e Eulerit është e zbatueshme, vetëm me kushtin që humbja e qëndrueshmërisë të ndodh në gjendjen e deformimeve elastike të shufrës, ajo duhet të ndodhë në kufijtë e veprimit të ligjit të Hukut. Tensioni kritik σ_k e llogaritur duke përpjestuar ngarkesën kritike P_k që vepron mbi shufër me sipërfaqen e seksionit të saj tërthor F :

$$\sigma_k = \frac{Pk}{F} = \frac{\pi^2 * E * I_{min}}{(\mu * l)^2 * F}$$

Momenti i inercisë mund të shprehet në funksion të sipërfaqes së seksionit tërthor dhe të rrezes së inercisë me formulën e mëposhtme:

$$I_{min} = F * i_{min}^2$$

Nga formula gjejmë se rrezja minimale e inercisë mund të llogaritet si më poshtë:

$$i_{min} = \sqrt{I_{min}/F} \quad (1)$$

Për një seksion të plotë shufër rrethore dimë se:

$$I = \frac{\pi * d^4}{64} \text{ dhe } F = \frac{\pi d^2}{4}$$

Pra rrezja minimale e inercisë së shufrës do të jetë.

$i_{min} = d/4$ pas zëvendësimit në formulën e llogaritje (1)

Nëse zëvendësojmë formulën e momenteve minimale të inercisë $I_{min} = F * i_{min}^2$ në formulën e tenseve kritike σ_k do të kemi:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 * E}{\lambda}$$

Ku λ quhet përkulshmëria e shufrës $\rightarrow \lambda = \frac{\mu * l}{i_{min}}$

9.5. Tensioni kritik

Sa më e madhe të jetë përkulshmëria e shufrës λ aq më të vogla do të jenë tensionet kritike dhe njëkohësisht aq më e vogël do të jetë forca shtypëse, në mënyrë që të shkaktojë përkuljen e saj gjatësore. Për materiale të ndryshme formula e Eulerit ka kufijtë e saj të përdorimit, të cilët përcaktohen nga kushti që tensionet kritike të lindura në shufër duhet të jenë më të vogla ose të barabarta me kufirin e proporcionalitetit σ_p të materialit të shufrës. Në këtë rast duhet të përcaktohet plotësimi i kushtit: $\sigma_k \leq \sigma_p$

Në këtë formulë duke zëvendësuar të barabartit e σ_k lidhur me përkulshmërinë e shufrës do të kemi: $\rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 * E}{\lambda} \leq \sigma_p$

Nga kjo formulë nxjerrim përkulshmërinë kufitare të shufrës dhe e shënojmë λ_k

$$\lambda_k = \frac{\pi * \sqrt{E}}{\sqrt{\sigma_p}}$$

Kushti përfundimtar i formulës së Eulerit paraqitet në formën e mëposhtme: $\lambda \geq \lambda_k = \frac{\pi * \sqrt{E}}{\sqrt{\sigma_p}}$

Formulën e Eulerit mund ta përdorim kur përkulshmëria e shufrës është më e vogël se ajo kufitare.

9.6. Llogaritja me ndihmën e koeficientit të pakësimit

Kontrolli i qëndrueshmërisë së shufrave që punojnë në shtypje bëhet me formulën:

$$\sigma = \frac{P}{F} < [\sigma]$$

Ku: $[\sigma] = \sigma_r / k$ është tensioni i lejuar për materialet elastike;

k - koeficienti i sigurisë

σ_r - tensioni i sigurisë në rrjedhshëmri

Kontrolli i qëndrueshmërisë së shtyllave që punojnë në përkulje gjatësore, bëhet me formulën:

$$\sigma = \frac{P}{F} < \sigma_{lej}$$

Ku: $\sigma_{lej} = \frac{\sigma_k}{n}$ tensioni i lejuar i epjes;

σ_k - tensioni kritik;

n- rezerva e qëndrueshmërisë.

Për shufrat tensioni i lejuar në epje σ_{lej} nuk është i paqëndrueshëm, pais i varet nga raporti i përmasave që ka ajo, kështu që tensioni shprehet me anë të tensionit të lejuar në shtypje σ_{sh} por duke futur këtu koeficientin e pakësimit φ

Pra $\sigma_{lej} = \varphi [\sigma_{sh}]$

Formula e kontrollit të qëndrueshmërisë është : $\sigma = \frac{P}{\Phi * F} \leq [\sigma_{sh}]$

Ku: σ - tensioni faktik nën veprimin e forcës shtytëse P;

F- sipërfaqja e seksionit tërthor të shufrës;

$[\sigma_{sh}]$ - tensioni i lejuar në shtypje të thjeshtë.

Koeficienti i pakësimit φ varet nga lloji i materialit dhe nga përkulshmëria λ . Vlerat e tij gjenden në tabela, kur nuk gjendet vlera e ndërmjetme λ , vlera e koeficientit Φ caktohet me interpolim.